Youth Competition Times

MATHS CAPSULE

Useful for All Competitive Exams :

Useful for : **RRB :** NTPC, GROUP-D, ALP, JE, RPF CONSTABLE, SI

SSC : CGL, CHSL, CPO-SI, GD, MTS, DELHI POLICE CONSTABLE

UPSSSC, PET, UPSI, UPP CONSTABLE, JAIL WARDEN, FIREMAN, RADIO OPERATOR, BIHAR SI/CONSTABLE, MP SI/CONSTABLE, RAJASTHAN SI/ CONSTABLE, HARYANA POLICE, DSSSB, HSSCE, TET, CTET, BANK, NAVODAY/ARMY SCHOOL, IB, NDA, CDS.

AGNIVEER : AIR FORCE X & Y, ARMY GD/CLERK, NAVY SSR/MR

And All Other Competitive Exams

Chief Editor
A.K. Mahajan

Compiled & Written by
Saurabh Khare

Computer Graphics by
Balkrishna & Pankaj Kushwaha

Editorial Office
12, Church Lane Prayagraj-211002
: 9415650134
Email : yctap12@gmail.com

website : www.yctbooks.com/www.yctfastbook.com/ www.yctbooksprime.com

© All Rights Reserved with Publisher

Publisher Declaration

Edited and Published by A.K. Mahajan for YCT Publications Pvt. Ltd. and E:Book by APP Youth Prime BOOKS In order to Publish the book, full care has been taken by the Editor and the Publisher, still your suggestions and queries are welcomed.

In case of any dispute, the judicial area will be Prayagraj.

विषय सूची (Index)

- **अंकगणित 3-60**
  1. **संख्या पद्धति (Number System) 3-32**
     - A. अंकों का विभाजन-प्रवाह आरेख (Division of numbers-flow chart) 3
     - B. विभाजिता के नियम (Divisibility Rules) 5
     - C. स्थानीयमान और जातीयमान (Place value and Face Value) 7
     - D. संख्याओं में भाग संक्रियाएँ (Division Operations in Number) 8
     - E. इकाई का अंक (Unit Digit) 9
     - F. शून्य स्थान (Zero Place) 10
     - H. शेषफल प्रमेय (Remainder Theorem) 15
  2. **प्रतिशत (Percentage) 33-36**
  3. **लाभ और हानि (Profit & Loss) 36-38**
  4. **छूट (Discount) 38-39**
  5. **अनुपात-समानुपात (Ratio-Proportion) 39-41**
  6. **साझेदारी (Partnership) 42-42**
  7. **मिश्रण और संलयन (Mixture & Alligation) 43-45**
  8. **समय और कार्य (Time & Work) 45-46**
  9. **पाइप और टंकी (Pipe & Cistern) 46-47**
  10. **साधारण ब्याज (Simple Interest) 47-48**
  11. **चक्रवृद्धि ब्याज (Compound Interest) 49-50**
  12. **समय, चाल और दूरी (Time, Speed & Distance) 51-53**
  13. **रेलगाड़ी (Train) 54-55**
  14. **नाव और धारा (Boat & Stream) 55-56**
  15. **दौड़ (Race) 57-58**
  16. **आयु (Age) 58-58**
  17. **औसत (Average) 59-60**
- **एडवांस्ड (Advanced) 61-175**
  18. **ज्यामिति (Geometry) 69-97**
      - A. रेखा और कोण (Line and Angle) 61
      - B. त्रिभुज (Triangle) 63
      - C. त्रिभुज की सर्वांगसमता तथा समरूपता (Congruency & Similarity of Triangle) 66
      - D. त्रिभुज के केन्द्र (Centre of Triangle) 68
      - E. चतुर्भुज (Quadrilateral) 77
      - F. वृत्त (Circle) 87
      - G. चक्रीय चतुर्भुज (Cyclic Quadrilateral) 95
      - H. द्रव्यमान बिन्दु ज्यामिति (Mass Point Geometry) 97
  19. **निर्देशांक ज्यामिति (Co-ordinate Geometry) 98-102**
  20. **क्षेत्रमिति (Mensuration) 103-154**
      - A. द्वि-आयामी/विमीय क्षेतमिति-(2D-Mensuration) 103
      - B. त्रि-आयामी/त्रिविमीय क्षेतमिति-(3D-Mensuration) 134
  21. **बीजगणित (Algebra) 155-164**
  22. **त्रिकोणमिति (Trigonometry) 165-172**
  23. **ऊँचाई और दूरी (Height & Distance) 173-175**
- **सांख्यिकी (Statistics) 176-208**
  24. **केन्द्रीय प्रवृत्ति की माप (Measurement of Central Tendency) 176-187**
      - A. समान्तर माध्य (Arithmetic Mean) 176
      - B. गुणोत्तर माध्य (Geometric Mean) 180
      - C. हरात्मक माध्य (Harmonic Mean) 180
      - D. समान्तर माध्य, गुणोत्तर माध्य तथा हरात्मक माध्य के मध्य सम्बन्ध (The Relation Between Arithmetic Mean, Geometric Mean & Harmonic Mean) 181
      - E. माध्यिका (Median) 181
      - F. बहुलक या भूयिष्ठक(Mode) 184
      - G. अनुभवजन्य सम्बन्ध माध्य माध्यिका और बहुलक (Empirical Relation between Mean, Median and Mode) 185
      - H. विभाजन मूल्य (Partition Value) 186
  25. **अपकिरण की माप (Measurement of Dispersion) 188-194**
      - A. अपकिरण (Dispersion) 188
      - B. प्रसरण (Variance) 188
      - C. अपकिरण मापने की रीतियाँ (Method of Dispersion of Measurement) 188
        - (i) विस्तार (Range) 189
        - (ii) अन्तर चतुर्थक विस्तार (Inter Quartile Range) 189
        - (iii) शतमक विस्तार (Percentile Range) ... 189
        - (iv) चतुर्थक विचलन (Quartile deviation) 190
        - (v) माध्य विचलन (Mean Deviation) 191
        - (vi) प्रमाप अथवा मानक विचलन (Standard Deviation) 192
      - D. अपकिरण की मापों का सम्बन्ध (Relationship between Measures of Dispersion) 194
  26. **क्रमचय और संचय (Permutation & Combination) 195-197**
  27. **प्रायिकता (Probability) 198-208**

01

संख्या पद्धति
(Number System)

अंकों का विभाजन (Division of numbers)

संख्या (Numbers)

वास्तविक संख्या (Real number)
$-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$ ....
$\sqrt{16}, \pi \frac{22}{7}, 3, 4, -3, 5, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{2}, -\sqrt{3}$

समिश्र संख्या (Complex number)
$(a + ib)$
$(2 + 3i)$
$(2 - 7i)$

काल्पनिक संख्या (Imaginary number)
किसी ऋणात्मक संख्या का वर्गमूल
(Square root any negative number)
$i = \sqrt{-1}$
$i^2 = -1, i^4 = 1$
$4i, 5i$
$3i, 7i$

परिमेय संख्या (Rational number)
जिसे p/q रूप में लिखा जा सकता है जहाँ $(q \neq 0)$

- $-5 = -\frac{5}{1}$
- $\frac{0}{1} = 0$
- $\frac{2}{1} = 2$
- $\sqrt{16} = \frac{4}{1} = 4$
- $\frac{22}{7}$
- $3.5 = \frac{35}{10}$
- $2.4 = \frac{24}{10}$

अपरिमेय संख्या (Irrational number)
जिसे p/q रूप में लिखा नहीं जा सकता

- $\sqrt{2} = 1.4142$..........
- $\sqrt{3} = 1.7320$..........
- $\sqrt{5} = 2.2360$..........
- $\pi = 3.14159$..........

पूर्णांक (Integers)
......$-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ ....

ऋण-पूर्णांक (Negative integers)
.......$-3, -2, -1$

शून्य (Zero)
0

धन-पूर्णांक (Positive integers)
1, 2, 3........

पूर्ण संख्या (Whole numbers)
0, 1, 2, 3, 4, 5, ...

प्राकृतिक संख्यायें (Natural numbers)
1, 2, 3, 4, 5, ...

इकाई संख्या (Unit number)
मात्र 1 गुणनखण्ड
(Only one factor)
$1 \Rightarrow 1$

अभाज्य या रूढ़ संख्या (Prime number)
मात्र 2 गुणनखण्ड
(Only two factors)
$2 \Rightarrow 1, 2$
$3 \Rightarrow 1, 3$
$5 \Rightarrow 1, 5$

भाज्य संख्या (Composite number)
2 से अधिक गुणनखण्ड
(More than two factors)
$4 \Rightarrow 1, 2, 4$
$6 \Rightarrow 1, 2, 3, 6$

विषम संख्या (Odd number)
(1, 3, 5, 7, ...)

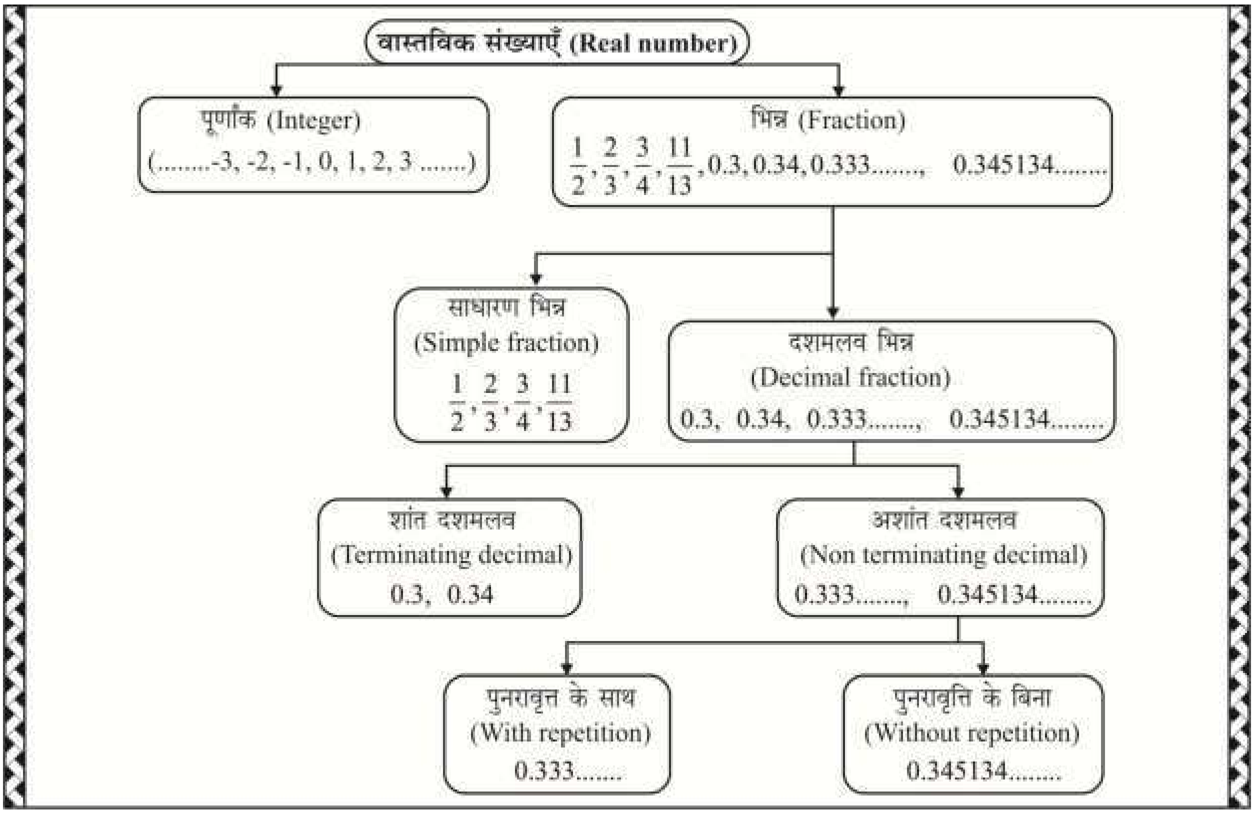
सम संख्या (Even number)
(2, 4, 6, 8 ....)

सह-अभाज्य/अपेक्षाकृत अभाज्य संख्या (Co-prime/Relatively prime number)

☞ संख्याओं का ऐसा युग्म जिसका म.स.प. 1 होता है, सह-अभाज्य संख्या कहलाती हैं। (A pair of numbers which H.C.F. (Highest common factor) is 1. is called co-prime number) **Ex.** (2, 3), (3, 4), (3, 5), (6, 7), (8, 11).

जुड़वा-अभाज्य संख्या (Twin-prime number)

☞ अभाज्य संख्याओं का ऐसा युग्म जिसमे 2 का अंतर होता है, जुड़वा-अभाज्य संख्या कहलाती हैं। (A pair of prime numbers in which the difference is two is called twin prime number) Ex. (3, 5), (5, 7), (11, 13)



☞ पुनरावृत्ति के साथ वाले दशमलव को परिमेय संख्या के रूप में व्यक्त कर सकते हैं। (Decimals with repetition can be expressed as rational numbers).

अभाज्य या रूढ़ संख्याओं की पहचान
(The test of prime number)

■ माना 'a' कोई दी गयी संख्या है तथा 'n' वह छोटी से छोटी प्राकृतिक संख्या है, (Let a is any give number and n is the smallest natural number).

जहाँ (where), $\boxed{n^2 \geq a}$

अब दी गयी संख्या को 'n' तथा इससे छोटी प्रत्येक अभाज्य संख्या से विभक्त करके देखे। यदि इनमें से किसी भी संख्या से 'a' पूर्णतः विभक्त नहीं होता है तब 'a' एक अभाज्य संख्या होगी, अन्यथा नहीं।

Now divide the given number by 'n' and smaller than each prime number. If 'a' is not completely divisible by any of these numbers, then 'a' will be a prime number otherwise not.

Ex. 241 का परीक्षण (Test of 241)–

$241 \Rightarrow 16^2 \geq 241$

16 से छोटी अभाज्य संख्याएँ (Prime number less than 16)

= 2, 3, 5, 7, 11, 13

$\because$ 241, 16 से छोटी किसी भी अभाज्य संख्या से विभक्त नहीं है। (241 is not divisible by any prime number less than 16)

$\therefore$ 241 अभाज्य संख्या है।

(241 is a prime number).

Ex. 437 का परीक्षण (Test of 437)–

$437 \Rightarrow 21^2 \geq 437$

21 से छोटी अभाज्य संख्याएँ (Prime number less than 21)

= 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19,

$\because$ 437, 19 से पूर्णतः विभाज्य है। (437 is completly divisible by 19)

$\therefore$ 437 एक भाज्य संख्या है।

(437 is a composite number).

अभाज्य संख्याओं की संख्या
(Number of prime numbers)

1-10 के बीच अभाज्य संख्या (Prime numbers between 1-10)	**4**
1-50 के बीच अभाज्य संख्या (Prime numbers between 1-50)	**15**
1-100 के बीच अभाज्य संख्या (Prime numbers between 1-100)	**25**
1-200 के बीच अभाज्य संख्या (Prime numbers between 1-200)	**46**
1-1000 के बीच अभाज्य संख्या (Prime numbers between 1-1000)	**168**

☞ प्रथम अभाज्य संख्या (First prime number) = 2

☞ प्रत्येक अभाज्य संख्या को (6k ± 1) के रूप में लिखा जा सकता है। लेकिन प्रत्येक (6k ± 1) आवश्यक रूप से अभाज्य संख्या नहीं हो सकती है।

Each prime number can be written as (6k ± 1) form. But every (6k ± 1) from may not be necessarily prime number.

Ex. $(6 \times 2 - 1) = 13$ अभाज्य संख्या (Prime number)

$25 = (6 \times 4 + 1)$ भाज्य संख्या (Composite number)

विभाजिता के नियम (Divisibility Rules)

2, 4, 8 तथा 16 की विभाजिता (Divisibility of 2, 4, 8 and 16)

- **2 की विभाजिता (Divisibility of 2)–:** यदि किसी संख्या का इकाई (अंतिम) का अंक या तो '0' हो या 2 से विभाज्य हो तो वह संख्या 2 से विभाज्य होगी।

  If the digit at unit place of a number is either '0' or divisible by 2, then the number is divisible by 2.

  Ex. 8570, 7242, 9376

- **4 की विभाजिता (Divisibility of 4)–:** यदि किसी संख्या के अन्तिम दो अंक (इकाई, दहाई) या तो '00' हो या 4 से विभाज्य हो तो वह संख्या 4 से विभाज्य होगी।

  If the last two digits (ten's place, units place) of a number is either '00' or divisible by 4, then the number is divisible by 4.

  Ex. 8700, 6924, 6376

- **8 की विभाजिता (Divisibility of 8)–:** यदि किसी संख्या के अन्तिम तीन अंक (इकाई, दहाई, सैकड़ा), या तो '000' या 8 से विभाज्य हो, तो संख्या 8 से विभाज्य होगी।

  If the last three digits (Hundred's place, ten's place, units place) of a number is either '000' or divisible by 8, then the number is divisible by 8.

  Ex. 63000, 9248, 7464

- **16 की विभाजिता (Divisibility of 16)–:** यदि किसी संख्या के अन्तिम चार अंक (इकाई, दहाई, सैकड़ा, हजार), या तो '0000' या 16 से विभाज्य हो, तो संख्या 16 से विभाज्य होगी।

  If the last three digits (Thousand's place, hundred's place, ten's place, units place) of a number is either '0000' or divisible by 16, then the number is divisible by 16.

  Ex. 630000, 948464

☞ 2 की विभाजिता (Divisibility of 2)

$2^1 = 2$ अंतिम अंक (Last digit)

☞ 4 की विभाजिता (Divisibility of 4)

$2^2 = 4$ अंतिम 2 अंक (Last 2 digits)

☞ 8 की विभाजिता (Divisibility of 8)

$2^3 = 8$ अंतिम 3 अंक (Last 3 digits)

☞ 16 की विभाजिता (Divisibility of 16)

$2^4 = 16$ अंतिम 4 अंक (Last 4 digits)

3 तथा 9 की विभाजिता (Divisibility of 3 and 9)

- **3 की विभाजिता (Divisibility of 3) –:** यदि किसी संख्या के अंकों का योग 3 से विभाज्य है तो वह संख्या 3 से विभाज्य होगी।

  If the sum of its all digits of a number is divisible by 3, then the number is divisible by 3.

  Ex. 78141

  $\Rightarrow \frac{7+8+1+4+1}{3} = \frac{21}{3} = 7$ (विभाज्य/divisible)

  अतः संख्या 78141, 3 से विभाज्य होगी। (Hence, the number 78141 will be divisible by 3)

  Ex. 246753

  $\Rightarrow \frac{2+4+6+7+5+3}{3} = \frac{27}{3} = 9$ (विभाज्य/divisible)

  अतः संख्या 246753, 3 से विभाज्य होगी। (Hence, the number 246753 will be divisible by 3)

- **9 की विभाजिता –:** यदि किसी संख्या के अंकों का योग 9 से विभाज्य है तो वह संख्या 9 से विभाज्य होगी।

  If the sum of its all digits of a number is divsible by 9, then the number is divisible by 9)

Ex. 764352

$\Rightarrow \frac{7+6+4+3+5+2}{9} \quad \frac{27}{9} = 3$ (विभाज्य/divisible)

अतः संख्या 764352, 9 से विभाज्य होगी। (Hence, the number 764352 will be divisible by 9)

Ex. 432432

$\Rightarrow \frac{4+3+2+4+3+2}{9} = \frac{18}{9} = 2$ (विभाज्य/divisible)

अतः संख्या 432432, 9 से विभाज्य होगी। (Hence, the number 432432 will be divisible by 9)

☞ 3 और 9 की विभाजिता में, योग के स्थान पर 'अंकीय योग' (Digital sum) का प्रयोग कर सकते हैं।

In divisibility of 3 and 9, we can use 'digital sum' in place of sum.

अंकीय योग (Digital sum)– यह केवल शेषफल की स्थिति है जब इसे 9 से विभाजित किया जाता है। अर्थात् अंकों का योग 9 होना चाहिए। 9 से अधिक होने पर अंको को आपस में जोड़ देते हैं।

It is just a position of remainder when it is divided by 9. That is, the sum of the digits should be 9. If it is more than 9 then add the digits together.

Ex. $10 \xrightarrow{\text{Digital sum}} 1 + 0 = 1$

$11 \xrightarrow{\text{Digital sum}} 1 + 1 = 2$

$84 \xrightarrow{\text{Digital sum}} 8 + 4 = 12 \quad 1 \quad 2 \quad 3$

$786 \xrightarrow{\text{Digital sum}} 7 + 8 + 6 = 21 \quad 2 \quad 1 \quad 3$

☞ उन सभी अंकों को काट दें जिनका योग 9 है। (Cut all digits whose sum is 9)

- एक पूर्ण वर्ग संख्या का डिजिटल योग 0 या 9, 1, 4, 7 है। (Digital sum of a perfect square number 0 or 9, 1, 4, 7)
- अंश संख्या में डिजिटल योग की गणना करने के लिए हमेशा हर में डिजिटल योग 1 बनाएं।

  To calculate digital sum in fraction number, then always make digital sum 1 in denominator.

हर (Demominator)	गुणक (Multiply)	अंकीय योग (Digital sum)
4	4 × 7 = 28	1
7	7 × 4 = 28	1
5	5 × 2 = 10	1
2	2 × 5 = 10	1
8	8 × 8 = 64	1

Note– यदि किसी संख्या का हर 3, 6 या 9 है, तो अंकीय योग के लिए 1 नहीं बना सकते हैं। (If the denominator of a number is 3, 6 or 9 then 1 can not be made for the digital sum).

5, 10, 25 और 100 की विभाजिता (Divisibility of 5, 10, 25 and 100)

- **5 की विभाजिता (Divisibility of 5) –:** यदि किसी संख्या का इकाई का अंक 0 या 5 है तो वह संख्या 5 से विभाज्य होगी।

  If the digit at unit place of a number is either 0 or 5 then the number is divisible by 5.

  Ex. 24520, 28735
- **10 की विभाजिता (Divisibility of 10) –:** यदि किसी संख्या का इकाई का अंक शून्य है तो वह संख्या 10 से विभाज्य होगी।

  If the digit at unit place of a number is 0 then the number is divisible by 10.

  Ex. 570120, 4567890
- **25 की विभाजिता (Divisibility of 25) –:** यदि किसी संख्या के अंतिम दो अंक (दहाई, इकाई) 25, 50, 75 या 00 हो तो वह संख्या 25 से विभाज्य होगी।

  If the last two digits (ten's, unit's place) of a number either 25, 50, 75 or 00, then the number is divisible by 25.

  Ex. 8725, 68750, 931275, 8600
- **100 की विभाजिता (Divisibility of 100) –:** यदि किसी संख्या के अंतिम दो अंक (दहाई, इकाई) 00 हो तो वह संख्या 100 से विभाज्य होगी।

  If the last two digits (ten's, unit's place) of a number 00, then the number is divisible by 100.

  Ex. 689200
- **7 की विभाजिता (Divisibility of 7) –:** किसी संख्या के इकाई के अंक को छोड़कर शेष बची, संख्या से इकाई के अंक के दुगने को घटाने पर प्राप्त संख्या यदि 7 से विभाज्य है तो वह संख्या 7 से विभाज्य होगी। बड़ी संख्याओं के लिए यह क्रिया बार-बार दोहराते है।

  If the number obtained by subtracting twice the unit digit from the remaining number excluding the unit digit, is divisible by 7, then that number will be divisible by 7. Repeat this process again and again for larger numbers.

  Ex. 343

  34 | 3 × 2
  −6
  28 $\Rightarrow \frac{28}{7}$ = पूर्णांक

  अतः 343, 7 से विभाज्य है।

  (Hence, 343 is divisible by 7)

  Ex. 383838

  38383 | 8 × 2
  16
  3836 | 7 × 2
  14
  382 | 2 × 2
  4
  37 | 8
  16
  21 $\Rightarrow \frac{21}{7}$ = 3 पूर्णांक

  अतः 383838, 7 से विभाज्य है।

  (Hence, 383838 is divisible by 7)
- **11 की विभाजिता (Divisibility of 11)–:** यदि किसी संख्या के समस्थानों के अंकों योग, विषम स्थानों के अंकों का योग, का अंतर या तो शून्य हो या 11 का गुणज हो, तो वह संख्या 11 से विभाज्य होगी।

  If the difference of the sum of the digits in even position and the sum of the digits in odd position is zero or multiple of 11.

  Ex. 352143

समस्थानों का योग (Sum of even position) = 4 + 2 + 3 = 9

विषम स्थानों का योग (Sum of odd position) = 3 + 1 + 5 = 9

$$\Rightarrow |9-9| = 0$$

अतः संख्या 352143, 11 से पूर्णतः विभक्त होगी।

(Hence, the number 352143 is divisible by 11)

Ex. 71940

समस्थानों का योग (Sum of even position) = 4 + 1 = 5

विषम स्थानों का योग (Sum of odd position) = 0 + 9 + 7 = 16

$$\Rightarrow \frac{|5-16|}{11} = 1 \text{ (पूर्ण संख्या)}$$

अतः संख्या 71940, 11 से पूर्णतः विभक्त होगी।

(Hence, the number 71940 is divisible by 11)

7, 11 और 13 की विभाजिता (Divisibility of 7, 11, 13)

- किसी संख्या के दाहिने तरफ से 3-3 अंकों के जोड़े बनाये। समस्थानों के युग्मों का योग तथा विषम स्थानों के युग्मों का योग का अंतर निकालें–

  Make pairs of three digits from the right side of a numbers. Find the difference between sum of pairs at even places and sum of pairs at odd places–

- ☞ यदि अंतर 0 आयेगा तो संख्या 7, 11 और 13 से विभाज्य होगी।

If the difference is 0, then the number will be divisible by 7, 11 and 13.

- ☞ यदि अंतर 7, 11 और 13 में से जिस-जिस से विभाज्य होगी तब संख्या भी उसी से विभाज्य होगी।

If the difference is divisible by any of 7, 11 and 13, then the number will also be divisible by that.

Ex. 786786

786 786 = |786 – 786| ⇒ 0

अतः संख्या 7, 11 और 13 से विभाज्य होगी।

Hence, the number is divisible by 7, 11 and 13.

Ex. 1001

001 001 = |001 – 001| ⇒ 0

अतः संख्या 7, 11 और 13 से विभाज्य होगी।

Hence, the number is divisible by 7, 11 and 13.

Ex. 786730

786 730 = |786 – 730|

⇒ 56 (7 से विभाज्य/Divisible by 7)

अतः संख्या 7 से विभाज्य होगी।

Hence, the number is divisible by 7

Ex. 5786

005 786 = |005 – 786|

⇒ 781 (11 से विभाज्य/Divisible by 11)

अतः संख्या 11 से विभाज्य होगी।

Hence, the number is divisible by 11

Ex. 91689

091 689 = |091 – 689|

⇒ 598 (13 से विभाज्य/Divisible by 13)

अतः संख्या 13 से विभाज्य होगी।

Hence, the number is divisible by 13

Ex. 786709

786 709 = |786 – 709|

⇒ 77 (7 और 11 से विभाज्य/Divisible by 7 and 11)

अतः संख्या 7 और 13 से विभाज्य होगी।

Hence, the number is divisible by 7 and 13.

- ■ जब कोई संख्या किसी अन्य संख्या से विभाज्य है, तो वह उस (अन्य) संख्या के गुणनखण्ड से भी विभाज्य होगी।

When a number is divisible by another number, It is also divisible by the factor of the number.

Ex. 48, 12 से विभाज्य है। (48 is divisible by 12)

तब 12 के गुणनखण्ड (1, 2, 3, 4, 6, 12) से भी 48 विभाज्य होगा। (Then, 48 is also divisible by factor (1, 2, 3, 4, 6, 12) of 12).

- ■ जब कोई संख्या दो या दो से अधिक सहअभाज्य संख्याओं से विभाज्य हो तो वह संख्या उनके गुणनफल से भी विभाज्य होगी।

When a number is divisible by two or more co-prime numbers, It is also divisible by their products.

Ex. 12, 2 तथा 3 से विभाज्य है। (12 is divisible by 2 and 3)

∵ (2, 3) → सहअभाज्य संख्याएं हैं। (Co-prime number)

∴ 12, (2 × 3) से भी विभाज्य होगा। (12 is divisilbe by (2 × 3).

- ■ जब कोई संख्या, दी गयी किन्हीं दो संख्याओं का गुणनखण्ड हो, तो वह संख्या उन दो संख्याओं के योग और अंतर का भी गुणनखण्ड होगी।

When a number is a factor of two given number It is also a factor of their sum and difference.

Ex. ∵ 6, 30 का गुणनखण्ड है। (6 is factor of 30)

तथा 6, 18 का गुणनखण्ड है। (and 6 is factor of 18)

तब 6, {(30 + 18) = 48} और {(30 – 18) = 12} का गुणनखण्ड होगा।

Then, 6 is factor of {(30 + 18) = 48} and {(30 – 18) = 12}

- ■ जब कोई संख्या, किसी अन्य संख्या का गुणनखण्ड है, तो वह संख्या, उस (अन्य) संख्या के गुणज का भी गुणनखण्ड होगी।

When a number is a factor of another number, It is also a factor of any multiple of that number.

Ex. ∵ 4, 12 का गुणनखण्ड है। (4 is factor of 12)

तब 4, 12 के गुणज (12, 24, 36, ...) का भी गुणनखण्ड होगा।

Then, 4 is also factor of multiple (12, 24, 36, ...) of 12.

- ☞ यदि कोई संख्या एक अंक की 6 बार पुनरावृत्ति से बनी है। तो वह 3, 7, 11, 13, 37 से विभाज्य होगी।

If a number is formed by repeating a digit six times, it will be divisible by 3, 7, 11, 13, 37.

Ex. (111111), (222222), (333333)

- ☞ यदि कोई संख्या दो अंकों की तीन बार पुनरावृत्ति से बनी है तो वह 3, 7, 13, 37 से विभाज्य होगी।

If a number is formed by repeating 2 digit 3 times, it will be divisible by 3, 7, 13, 37.

Ex. 383838, 171717, 595959

- ☞ यदि किसी संख्या में 3, 6, 9 या 12 (3 के गुणज) में बार समान अंकों की पुनरावृत्ति होती है तो वह संख्या 3 तथा 37 से विभाज्य होगी।

If a number repeats the same digit 3, 6, 9, 12 (multiple of 3), then that number will be divisible by 3 and 37.

Ex. (111), (222222), (333333333), (444444444444)

स्थानीयमान तथा जातीयमान
(Place value and face value)

स्थानीयमान (Place value)–: किसी दी गयी संख्या में किसी अंक का स्थानीयमान उसके स्थान का वर्णन करता है।

The place value of a digit describes its place in a given number.

Ex. संख्या 7345724 में 7 का स्थानीयमान है–

Place value of 7 in number 7345724–

7345724

└→ 7 × 100 – 700

└→ 7 × 1000000 = 7000000

Ex.

संख्या (Number)

3 5 7 2 — स्थानीयमान (Place value)

→ 2 × 1 = 2

→ 7 × 10 = 70

→ 5 × 100 = 500

→ 3 × 1000 = 3000

Ex. 'ग्यारह हजार ग्यारह सौ ग्यारह' को अंकों में लिखो–

Write 'Eleven thousand eleven hundred eleven' in digits–

11000
 1100
+ 11
12111

जातीयमान (Face value)–: किसी संख्या में किसी अंक का जातीय मान उसका अपना मान है। इसका मान स्थान पर निर्भर नहीं करता है।

Face value is the value of the digit itself in a number. It does not depend upon its position in the number.

Ex. संख्या 7345724 में 7 का जातीयमान है–

Face value of 7 in number 7345724–

7345724

└→ 7

└→ 7

Ex.

संख्या (Number)

3 5 7 2 — जातीयमान (Face value)

→ 2

→ 7

→ 5

→ 3

☞ शून्य का स्थानीयमान के साथ-साथ जातीय मान भी शून्य होता है। (The face value as well as place value of zero is always zero).

दशमलव संख्या का स्थानीय मान

(Place value of a decimal number)

78623.4679

$7 \times 10000 = 70000$

$8 \times 1000 = 8000$

$6 \times 100 = 600$

$2 \times 10 = 20$

$3 \times 1 = 3$

$9 \times \frac{1}{10000} = 0.0009$

$7 \times \frac{1}{1000} = 0.007$

$6 \times \frac{1}{100} = 0.06$

$4 \times \frac{1}{10} = 0.4$

संख्याओं में भाग संक्रियाएँ
(Division operation in numbers)

भाजक/divisor **(d)**) भाज्य/Dividend **(D)** (भागफल/quotient **(q)**

शेषफल/remainder **(r)**

$D = dq + r$ जहाँ/Where, $0 \le r < d$

Ex. वह संख्या ज्ञात करो जिसे 15 से भाग देने पर भागफल 14 और शेषफल 13 प्राप्त हो?

Find the number in which dividing by 15 gives quotient 14 and remainder 13?

Solve– $D = dq + r$

$D = 15 \times 14 + 13$

D = 223

Ex. किसी संख्या को जब 11 तथा 5 से उत्तरोतर भाग दिया जाता है, तो शेषफल क्रमशः 2 तथा 3 बचता है, उसी संख्या को 55 से भाग देने पर शेषफल कितना प्राप्त होगा?

By dividing a number by 11 and 5 successively, the remainder remains 2 and 3 respectively, what will be the remainder if the number is divided by 55?

Solve– ∵ $11 \times 5 = 55$

11 और 5, 55 के गुणनखण्ड हैं

(11 and 5 are factors of 55)

∴ $D = 11 \times 3 + 2$

D = 35

Ex. जब दो अलग-अलग संख्याओं को किसी भाजक से भाग देने पर शेषफल क्रमशः 547 एवं 349 आता है। जब उसी भाजक से दोनों संख्याओं के योग में भाग दें तो शेषफल 211 आता है, भाजक ज्ञात कीजिए?

When two different number are divided by a divisor, the remainder becomes 547 and 349 respectively when the sum of both numbers is divided by the same divisor, the remainder is 211, find the divisor.

Solve–

माना, प्रथम भागफल (First quotient) = q_1

द्वितीय भागफल (Second quotient) = q_2

उभयनिष्ठ भाजक (Common divisor) = d

∴ प्रथम संख्या (First number) = $dq_1 + 547$

द्वितीय संख्या (Second number) = $dq_2 + 349$

then, $\frac{(dq_1 + 547) + (dq_2 + 349)}{d} \xrightarrow{\text{Remainder}} 211$

∴ $d = 547 + 349 - 211$

d = 685

Ex. किसी संख्या को 441 से भाग देने पर शेषफल 40 बचता है। उसी संख्या को 21 से भाग देने पर शेषफल कितना बचेगा?

When a number is divided by 441, the remainder is 40. If the same number is divided by 21, the remainder will be?

Solve–

$\because$ 21, 441 का एक गुणनखण्ड है (21 is the factor of 441)

$\therefore \frac{40}{21} \xrightarrow{\text{Remainder}} \mathbf{19}$

अतः शेषफल 19 होगा।

Hence, the remainder will be 19.

Ex. किसी संख्या को 231 से भाग देने पर शेषफल 45 बचता है। उसी संख्या को 17 से भाग देने पर शेषफल कितना होगा?

When a number is divided by 231, the remainder is 45. If the same number is divided by 17, the remainder will be?

Solve–

$\because$ 17, 231 का गुणनखण्ड नहीं है। (17 is not the factor of 231)

$\therefore$ शेषफल ज्ञात नहीं किया जा सकता है। (The remainder can not be determined)

इकाई का अंक (Unit digit)

- **किसी संख्या का अंतिम अंक, इकाई का अंक कहलाता है। (The last digit of a number is called the unit digit).**

4364357
↳ इकाई का अंक (Unit digit)

☞ 763 + 542 ⇒ 1305
↳ इकाई का अंक (Unit digit)

☞ 765 + 849 ⇒ 1614
↳ इकाई का अंक (Unit digit)

☞ 763 – 542 ⇒ 221
↳ इकाई का अंक (Unit digit)

☞ 765 – 347 ⇒ 418
↳ इकाई का अंक (Unit digit)

☞ 765 – 947 ⇒ –182
↳ इकाई का अंक (Unit digit)

☞ 765 – 943 ⇒ –178
↳ इकाई का अंक (Unit digit)

☞ घटाव वाले प्रश्नों में इकाई का अंक निकालते समय बड़ी संख्या में से छोटी संख्या को घटाते हैं। (In subtraction problems, while finding the unit digit, the smaller number is subtracted from the larger number).

☞ प्राप्त उत्तर का अंतिम अंक, इकाई का अंक होगा। प्राप्त उत्तर धनात्मक या ऋणात्मक हो सकता है लेकिन इकाई का अंक नहीं। (The last digit of the answer obtained will be unit digit. The answer obtained can be positive or negative, but not the unit digit).

इकाई का अंक निकालना जब संख्या में घात लगी हो (Finding the unit digit when number is rised to the power)

- **जब किसी संख्या का इकाई अंक (0, 1, 5, 6) हो तो उस पर कोई भी घात हो तब उसका इकाई का अंक वही होगा। (When the unit digit of a number is 0, 1, 5 and 6 and it has any power, then its unit digit will be the same digit).**

☞ $(1530)^{[illegible]}$
↳ इकाई का अंक (Unit digit)

☞ $(761)^{[illegible]}$
↳ इकाई का अंक (Unit digit)

☞ $(765)^{[illegible]}$
↳ इकाई का अंक (Unit digit)

☞ $(756)^{[illegible]}$
↳ इकाई का अंक (Unit digit)

- **जब किसी संख्या का इकाई का अंक (2, 3, 4, 7, 8, 9) हो तथा उस पर कोई घात हो तब इकाई का अंक निकालना–**

When the unit digit of a number is 2, 3, 4, 7, 8, and 9 and it has any power, then find the unit digit–

☞ घात के अंतिम दो अंकों को 4 से भाग देकर शेषफल प्राप्त करते हैं। (Divid last two digits of power by 4 and find out remainder)

$$\frac{\text{घात के अंतिम दो अंक (Last two digits of power)}}{4}$$

शेषफल (Remainder) ⇒ 1, 2, 3, 0

शेषफल (Remainder)	घात (Power)
1	1
2	2
3	3
0	4

☞ $[172]^{[illegible]}$

$\frac{25}{4} \xrightarrow[\text{(Remainder)}]{\text{शेषफल}} 1 \xrightarrow[\text{(Power)}]{\text{घात}} 1$

$2^1 \Rightarrow 2$
↳ इकाई का अंक (Unit digit)

☞ $[978]^{[illegible]}$

$\frac{98}{4} \xrightarrow[\text{(Remainder)}]{\text{शेषफल}} 2 \xrightarrow[\text{(Power)}]{\text{घात}} 2$

$8^2 \Rightarrow 64$
↳ इकाई का अंक (Unit digit)

☞ $[567]^{[illegible]}$

$\frac{59}{4} \xrightarrow[\text{(Remainder)}]{\text{शेषफल}} 3 \xrightarrow[\text{(Power)}]{\text{घात}} 3$

$7^3 \Rightarrow 343$
↳ इकाई का अंक (Unit digit)

☞ $[6543]^{[illegible]}$

$\frac{72}{4} \xrightarrow[\text{(Remainder)}]{\text{शेषफल}} 0 \xrightarrow[\text{(Power)}]{\text{घात}} 4$

$3^4 \Rightarrow 81$
↳ इकाई का अंक (Unit digit)

जब संख्या N! के रूप में हो
(When the number is in the form of N!)

☞ **जब घात n! के रूप में हो**
(When the power is in the form of n!)-

$1! = 1$
$2! = 2 \times 1$
$3! = 3 \times 2 \times 1$
$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1$
$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$
$\mathbf{5! = 5 \times 4!}$
⋮
$\mathbf{n! = n(n-1)!}$

$\frac{n!}{4} \xrightarrow[\text{(Remainder)}]{\text{शेषफल}} 0 \xrightarrow[\text{(Power)}]{\text{घात}} 4$

जहाँ/Where, **n! ≥ 4**

Ex. $992^{786!}$

$\because 786! > 4! \xrightarrow[\text{(Remainder)}]{\text{शेषफल}} 0 \xrightarrow[\text{(Power)}]{\text{घात}} 4$

$\therefore 2^4 = 16$

↳ इकाई का अंक (Unit digit)

☞ **जब संख्या n! के गुणनफल के रूप में हो (When the number is in the form of multiplication of n!)–**

संख्या/ number	0!	1!	2!	3!	4!
इकाई का अंक/Unit digit	1	1	2	6	4

- 5! और 5! से अधिक इकाई का अंक 0 देता है। (5! and greater than 5! give unit digit 0).

5 के गुणन का इकाई का अंक
(Unit digit of multiplication by 5)

☞ $5 \times$ विषम संख्या (Odd number) $\xrightarrow[\text{(Unit digit)}]{\text{इकाई का अंक}} 5$

Ex. $5 \times 1 = 5 \xrightarrow[\text{(Unit digit)}]{\text{इकाई का अंक}} 5$

Ex. $5 \times 3 = 15 \xrightarrow[\text{(Unit digit)}]{\text{इकाई का अंक}} 5$

☞ $5 \times$ सम संख्या (Even number) $\xrightarrow[\text{(Unit digit)}]{\text{इकाई का अंक}} 0$

Ex. $5 \times 2 = 10 \xrightarrow[\text{(Unit digit)}]{\text{इकाई का अंक}} 0$

Ex. $5 \times 4 = 20 \xrightarrow[\text{(Unit digit)}]{\text{इकाई का अंक}} 0$

☞ $5 \times \frac{\text{विषम संख्या}}{\text{(Odd number)}} \times \frac{\text{सम संख्या}}{\text{(Even number)}} \xrightarrow[\text{(Unit digit)}]{\text{इकाई का अंक}} 0$

Ex. $5 \times 1 \times 2 = 10 \xrightarrow[\text{(Unit digit)}]{\text{इकाई का अंक}} 0$

Ex. $5 \times 3 \times 4 = 60 \xrightarrow[\text{(Unit digit)}]{\text{इकाई का अंक}} 0$

■ किसी पूर्ण वर्ग संख्या का इकाई का अंक 0, 1, 4, 5, 6 या 9 हो सकता है, लेकिन यदि किसी संख्या का इकाई का अंक 0, 1, 4, 5, 6 या 9 हैं, तो आवश्यक नहीं कि वह पूर्ण वर्ग संख्या होगी।
The unit digit of a perfect square number can be 0, 1, 4, 5, 6 or 9 but if the unit digit of a number is 0, 1, 4, 5, 6 or 9 then it is not necessary that it is a perfect square number.

शून्य स्थान (Zero Place)
शून्यों की पगडंडी (Number of trailing zeroes)

■ शून्य का निर्माण 5 एवं 2 के युग्म (Pair) से होता है अर्थात 5 तथा 2 का गुणनफल करने पर हमें शून्य की प्राप्ति होती है।
A zero is formed by a pair of 5 and 2, i.e. by multiplying 5 and 2, we get zero

■ किसी भी प्रश्न में 5 एवं 2 के जितने जोड़े होगे उतने ही शून्य का निर्माण होता है। इसलिए प्रश्नों को हल करने के लिए 5 एवं 2 की घातो को देखा जाता है और जिसका घात कम होता है उतने ही शून्य का निर्माण होता है।
In any question, as many pairs of five and two are formed, The same zero is formed. Therefore, to solve the question the powers of 5 and 2 are seen and whose power is less, the same zero is created.

☞ $5 \times 2 = 10$
$5^1 \times 2^1 \xrightarrow{\text{No. of pair}} 1 \xrightarrow{\text{No. of zero}} 1$

☞ $25 \times 4 = 100$
$5^2 \times 2^2 \xrightarrow{\text{No. of pair}} 2 \xrightarrow{\text{No. of zero}} 2$

☞ $125 \times 4 = 500$
$5^3 \times 2^2 \xrightarrow[\text{(Which power less)}]{\text{No. of pair}} 2 \xrightarrow{\text{No. of zero}} 2$

☞ $25 \times 8 = 200$
$5^2 \times 2^3 \xrightarrow[\text{(Which power less)}]{\text{No. of pair}} 2 \xrightarrow{\text{No. of zero}} 2$

☞ $125 \times 8 = 1000$
$5^3 \times 2^3 \xrightarrow{\text{No. of pair}} 3 \xrightarrow{\text{No. of zero}} 3$

Ex. 25 × 16 × 2 × 5 को गुणा करने पर दाहिने ओर कितने शून्य होगे?
Multiplying 25 × 16 × 2 × 5 will be how many zeros on the right side.

Sol. $25 \times 16 \times 2 \times 5$
$\Rightarrow 5 \times 5 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5$
$\Rightarrow 5^3 \times 2^4$
$5^3 \times 2^4 \xrightarrow[\text{(Which power less)}]{\text{No. of pair}} 3 \xrightarrow{\text{No. of zero}} 3$

Ex. 300 × 400 × 24 × 25 का गुणा करने पर दाहिने ओर कितने शून्य होगे?
Multiplying 300 × 400 × 24 × 25 will be how many zeros on right side.

Sol. $300 \times 400 \times 24 \times 25$

$\Rightarrow 3 \times 4 \times 24 \times 25 \times 10000$

$\Rightarrow 3 \times 4 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 5 \times 10000$

$\Rightarrow 2^5 \times 5^2 \times 3^2 \times 10000$

$2^5 \times 5^2 \times 3^2 \times 10000$

(00) (0000)

शून्यों की संख्या (Number of zeroes) = 6

Ex. 1 से लेकर 60 तक सभी प्राकृतिक संख्याओं का गुणा करने पर दाहिने ओर कितने शून्य आऐगे? [Multiplying all natural numbers from 1 to 60, how many zeros will come to the right side.]

Sol. $1 \times 2 \times 3 \times .... \times 25 \times .... \times 50 \times ...... \times 60$

$\frac{60}{5} = 12$

$\frac{12}{5} = 2 \qquad 12 + 2 = 14$ (शून्य/Zeroes)

☞ दिए गये प्रश्न में यह स्पष्ट है कि गुणनफल करने पर 5 की घात की संख्या 2 की अपेक्षा कम प्राप्त होती है।

In the given question it is clear taht on multiplying, the power of 5 is less than that of 2.

☞ जब भागफल 5से कम हो तब भाग देना बन्द कर देते हैं।

Stop dividing when the quotient is less than 5.

Ex. 1 से लेकर 100 तक की सभी संख्याओं का गुणा करने पर कितने शून्य आऐगे? Multiplying all natural number from 1 to 100, How many zeros will come to right side.

Sol. $1 \times 2 \times 3 \times ..... \times 25 \times ..... \times 50 \times ...... \times 75 \times ...... \times 100$

$\Rightarrow \frac{100}{5} = 20$

$\frac{100}{25} = 4 \qquad 20 + 4 = 24$ (शून्य/Zeroes)

Ex. 1 से लेकर 500 तक सभी प्राकृतिक संख्याओं का गुणा करने पर दाहिने ओर कितने शून्य आऐगे।

Multiplying all natural numbers from 1 to 500, how many zeros will come to right side.

Sol. $1 \times 2 \times 3 \times ..... \times 25 \times ..... \times 50 \times ...... \times 100 \times ...... \times 500$

$\frac{500}{5} = 100$

$\frac{100}{5} = 20$

$\frac{20}{5} = 4 \qquad 100 + 20 + 4 = 124$ (शून्य/Zeroes)

Ex. 1 से लेकर 1000 तक की सभी संख्याओं का गुणा करने पर दाहिने ओर कितने शून्य आऐगे।

Multiplying all natural numbers 1 to 1000, How many zeros will come to right side.

Ex. $1 \times 2 \times 3 \times ..... \times 25 \times ..... \times 50 \times ...... \times 100 \times ...... \times 1000$

$\frac{1000}{5} = 200$

$\frac{200}{5} = 40$

$\frac{40}{5} = 8$

$\frac{8}{5} = 1 \qquad 200 + 40 + 8 + 1 = 249$ (शून्य/Zeroes)

Ex. 80 तक की सभी सम संख्याओं का गुणा करने पर दाहिनी ओर कितने शून्य आऐगे?

Multiplying all even numbers upto 80, How many zeros will come to right side.

Sol. $2 \times 4 \times 6 \times .... \times 80$

$\frac{80}{10} = 8$

$\frac{8}{5} = 1 \qquad 8 + 1 = 9$ (शून्य/Zeroes)

☞ सम संख्याओं के गुणनफल में, पहली बार भाग 10 से करते हैं, इसके बाद 5 से।

In multiplication of even number, first divide by 10, then by 5

Ex. 51 से लेकर 100 तक की सभी संख्याओं का गुणा करने पर कितने शून्य आऐगे?

Multiplying all the numbers 51 to 100, How many zeros will come to right side.

Sol. $51 \times 52 \times 53$ 100

$\Rightarrow [1 \times 2 \times 3 \text{ .... } 100] - [1 \times 2 \times 3 \text{ .... } 50]$

$\Rightarrow \frac{100}{5} = 20 \qquad \frac{50}{5} = 10$

$\frac{20}{5} = 4 \qquad \frac{10}{5} = 2$

$\Rightarrow [20 + 4 = 24] \qquad [10 + 2 = 12]$

$\Rightarrow [24] - [12] = 12$ (शून्य/Zeroes)

Ex. 96! को हल करने पर दाहिने ओर कितने शून्य आयेगे।

On solving 96! how many zeros will come to right side.

Sol. $96! = 96 \times 95 \times 94 \times .... \times 1$

$\frac{96}{5} = 19$

$\frac{19}{5} = 3 \qquad 19 + 3 = 22$ (शून्य /Zeroes)

Ex. 9860! को हल करने पर दाहिने ओर कितने शून्य आयेगे।

On solving 9860!, How many zeros will come to right side.

Sol. $9860! = 9860 \times 9859 \text{ .... } \times 1$

$\therefore \frac{9860}{5} = 1972$

$\frac{1972}{5} = 394$

$\frac{394}{5} = 78$

$\frac{78}{5} = 15$

$\frac{15}{5} = 3$

$\Rightarrow 1972 + 394 + 78 + 15 + 3 = 2462$ (शून्य/Zeroes)

Ex. 1 से लेकर 100 तक विषम संख्याओं का गुणा करने पर कितने शून्य आऐगे?

Multiplying all the odd numbers 1 to 100, how many zeros will come to right side.

Sol. $1 \times 3 \times 5 \times 7 \times 9 \times 11$ 99

"शून्यों की संख्या शून्य होगी (Number of zeroes is zero)"

☞ दिये गये प्रश्न में सभी संख्याऐ विषम है। कोई भी संख्या 2 से विभाजित नही होगी इसलिये इन संख्याओं के गुणनफल में 2 का कोई भी अंक नही आयेगा। अतः दिए गये प्रश्न के गुणनफल के अन्त में एक भी शून्य प्राप्त नही होगा?

In the given question all the numbers are odd, no number will be divisible by 2. Hence no digit of two will appear in the product of these numbers. Hence not a single zero will be obtained at the end of the product of the given question.

Ex. प्रथम 100 अभाज्य संख्याओं का गुणा करने पर दाहिने ओर कितने शून्य आऐगे?

Multiplying the first 100 prime numbers, How many zeros will come to right side.

Sol. $2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 \times 17 \times 19 \times$ .... $\times$ 97

$\Rightarrow 2 \times 5$

$\Rightarrow 2^1 \times 5^1$

= शून्य की संख्या (Number of zero) = 1

Ex. $(1 \times 3 \times 5 \times 7 \times$ .... $\times 99) \times 8$ के गुणनखण्ड के अंत में दाहिने ओर कुल कितने शून्य आयेंगे।

How many zeroes on the right end of the product of $(1 \times 3 \times 5 \times 7 \times$ .... $\times 99) \times 8$.

Sol. $(1 \times 3 \times 5 \times 7 \times$ .... $\times 99) \times 8$

$(5 \times 15 \times 25 \times 35 \times$ .... $\times 95) \times 8$

{5 और 2 के जोड़े के लिए/For pair of 5 and 2}

$\Rightarrow 5^{12} \times 2^3$

$5^{12} \times 2^3 \xrightarrow{\text{No. of pair}} 3 \xrightarrow{\text{No. of zero}} 3$

(Which power less)

Ex. शून्यकों की संख्या ज्ञात करो।

Find the number of zeroes.

$(3^{123} - 3^{122} - 3^{121})\ (2^{121} - 2^{120} - 2^{119})$

Sol. $(3^{123} - 3^{122} - 3^{121})\ (2^{121} - 2^{120} - 2^{119})$

$3^{121}\ (3^2 - 3^1 - 3^0)\ 2^{119}\ (2^2 - 2^1 - 2^0)$

3^{121} (9 – 3 – 1) 2119 (4 – 2 – 1)

$3^{121}\ (5)\ 2^{119}\ (1)$

$2^{119} \times 3^{121} \times 5^1$

$2^{119} \times 5^1 \times 3^{121}$

No. of pair 1 → no. of zero – 1

Ex. यदि 100! को 3^n से पूर्णतः विभाजित किया जाए तो n का अधिकतम मान होगा–

If 100! divisible by 3^n then find the maximum value of n :

Sol. $100! = 100 \times 99 \times 98 \times$ .... $\times 1$

$\frac{100}{3} = 33$

$\frac{33}{3} = 11$

$\frac{11}{3} = 3$

$\frac{3}{3} = 1$

$\Rightarrow\ 33 + 11 + 3 + 1 = 48$

अतः/Hence n = 48

Ex. यदि 122!, 6^n से पूर्णतः विभाज्य हो तो n का अधिकतम मान होगा–

If 122! is divisible by 6^n then find the maximum value of n :

Sol. $\frac{122!}{6} = \frac{122!}{2 \times 3}$

2 और 3 का जोड़ा बनाने के लिए, 3 की घात कम होगी (To make a pair of 2 and 3, the power of 3 will be reduced.)

$\frac{122}{3} = 40$

$\frac{40}{3} = 13$

$\frac{13}{3} = 4$

$\frac{4}{3} = 1$

$\Rightarrow\ 40 + 13 + 4 + 1 = 58$

अतः/Hence n = 58

Ex. 123!, 12^n से पूर्णतः विभाज्य हो तो n का अधिकतम मान होगा–

If 123! is divisible by 12^n then find the maximum value of n :

Sol. $\frac{123!}{12^n} = \frac{123}{3 \times 2^2}$

$\frac{123!}{3^{59} \times 2^{117}}$

$\frac{123!}{3^{59} \times \left(2^2\right)^{58} \times 2^1}$

$\frac{123!}{3^{59} \times (4)^{58} \times 2^1}$

अतः/Hence n = 58

$\frac{123}{3} = 41$

$\frac{41}{3} = 13$

$\frac{13}{3} = 4$

$\frac{4}{3} = 1$

Sum = 59

$\frac{123}{2} = 61$

$\frac{61}{2} = 30$

$\frac{30}{2} = 15$

$\frac{15}{2} = 7$

$\frac{7}{2} = 3$

$\frac{3}{2} = 1$

Sum = 117

गुणनखण्डों की संख्या (Number of factors)

गुणनखण्ड (Factors)

गुणनखण्ड धनात्मक पूर्णांक होते हैं, जो किसी संख्या को पूर्णतः विभाजित कर सकते हैं।

Factors are positive integers that can divide a number exactly.

Ex. 12 के गुणनखण्ड (Factors of 12)

1, 2, 3, 4, 6, 12

☞ 12 के गुणज (Multiple of 12)

12, 24, 36, 48, ...

गुणनखण्डों को ज्ञात करना (How to find factors)

- किसी भी संख्या को उसके अभाज्य गुणनखण्डों के रूप में लिखना।

  Writing any numbers as its prime factors.

Ex. $12 = 2^2 \times 3^1$

$72 = 2^3 \times 3^2$

$90 = 2^1 \times 3^2 \times 5^1$

$$m = x^a . y^b . z^c$$

जहाँ/Where,

$m \Rightarrow$ संयुक्त संख्या (Composite number)

$a, b, c \Rightarrow$ प्राकृतिक संख्या (Natural number)

$x, y, z \Rightarrow$ अभाज्य संख्या (Prime number)

x → सम (Even); y, z → विषम (Odd)

- कुल गुणनखण्डों की संख्या (The number of total factors)–: $\mathbf{(a + 1) (b + 1) (c + 1)}$
- विषम गुणनखण्डों की संख्या (The number of odd factors)–: $\mathbf{(b + 1) (c + 1)}$
- सम गुणनखण्डों की संख्या (The number of even factors)–: $\mathbf{a (b + 1) (c + 1)}$
- सभी गुणनखण्डों का योग (The sum of all factors)–: $\mathbf{(x^0 + x^1 + x^2 \ldots\ldots x^a) \times (y^0 + y^1 + y^2 \ldots\ldots y^b) \times (z^0 + z^1 + z^2 \ldots\ldots z^c)}$
- विषम गुणनखण्डों का योग (The sum of odd factors)–: $\mathbf{(y^0 + y^1 + \ldots\ldots y^b) \times (z^0 + z^1 + z^2 \ldots\ldots z^c)}$
- सम गुणनखण्डों का योग (The sum of even factors)–: $\mathbf{(x^1 + x^2 + x^3 \ldots\ldots x^a) \times (y^0 + y^1 \ldots\ldots y^b) \times (z^0 + z^1 + z^2 \ldots\ldots z^c)}$
- सभी गुणनखण्डों का गुणा (The product of factors) –: $\mathbf{(x.y.z)^{\text{Total no. of factors/2}}}$
- संख्या n के गुणनखण्डों के व्युत्क्रमों का योग (Sum of reciprocal of factors of n) =

$$\frac{\text{गुणनखण्डों का योग (sum of factors)}}{n}$$

- औसत (Average) = $\dfrac{\text{गुणनखण्डों का योग (Sum of factors)}}{\text{गुणनखण्डों की संख्या (No. of factors)}}$

12 के विभिन्न गुणनखण्डों के लिए (For the factors of 12)

$\mathbf{12 = 2^2 \times 3^1}$

- **कुल गुणनखण्डों की संख्या (The number of total factors)–**

  $12 = 2^2 \times 3^1$

  $(2 + 1) \times (1 + 1)$

  $3 \times 2 = \mathbf{6}$

- **विषम गुणनखण्डों की संख्या (The number of odd factors)–**

  $12 = 2^2 \times 3^1$

  $(1 + 1) = \mathbf{2}$

- **सम गुणनखण्डों की संख्या (The number of even factors)–**

  $\mathbf{12 = 2^2 \times 3^1}$

  $2 \times (2^1 \times 3^1)$

  सम (Even) $(1 + 1) \times (1 + 1)$

  $(2) \times (2) = \mathbf{4}$

- **सभी गुणनखण्डों का योग (The sum of factors)–**

  $\mathbf{12 = 2^2 \times 3^1}$

  $= (2^0 + 2^1 + 2^2)(3^0 + 3^1)$

  $= (1 + 2 + 4)(1 + 3)$

  $= 7 \times 4 \Rightarrow \mathbf{28}$

- **विषम गुणनखण्डों का योग (The sum of odd factors)–**

  $\mathbf{12 = 2^2 \times 3^1}$

  $\Rightarrow (3^0 + 3^1)$

  $1 + 3 \Rightarrow \mathbf{4}$

☞ विषम गुणनखण्डों के योग के लिए, सम गुणनखण्डों को छोड़ देते हैं। (For the sum of odd factors, leave out even factors).

- **सम गुणनखण्डों का योग (The sum of even factors)–**

  $\mathbf{12 = 2^2 \times 3^1}$

  $\Rightarrow (2^1 + 2^2)(3^0 + 3^1)$

  $\Rightarrow (2 + 4)(1 + 3)$

  $\Rightarrow 6 \times 4$

  $\Rightarrow \mathbf{24}$

☞ सम गुणनखण्डों के योग के लिए, 2^0 से प्रारम्भ नहीं करते हैं। (For sum of even factors, don't start from 2^0).

- **सभी गुणनखण्डों का गुणा (The product of all factors)–**

  $\mathbf{12 = 2^2 \times 3^1}$

  Product of all factors of N = $\mathbf{N^{\text{Total no. of factors/2}}}$

  $12 = 2^2 \times 3^1$

  $(2 + 1) \times (1 + 1)$

  $3 \times 2 = \mathbf{6}$

  $= 12^{\frac{6}{2}}$

  $= \mathbf{12^3}$

■ **864 के ऐसे कितने गुणनखण्ड हैं, जो 6 के गुणन हो।**

How many factors of 864 which are multiple of 6?

Sol. $864 = 2^5 \times 3^3$

$864 = 2 \times 3\ [2^4 \times 3^2]$ {6 के गुणज के लिए}

$= 6\ [2^4 \times 3^2]$

$(4 + 1)\ (2 + 1)$

$\Rightarrow 5 \times 3$

$\Rightarrow 15$

■ **$2^7 \times 3^8 \times 5^9 \times 7^{10}$ के ऐसे कितने गुणनखण्ड है, जो पूर्ण वर्ग हैं।**

How many factors of $2^7 \times 3^8 \times 5^9 \times 7^{10}$ which are completely square?

Sol. $2^7 \times 3^8 \times 5^9 \times 7^{10}$

$\Rightarrow [(2^2)^3\ 2 \times (3^2)^4 \times (5^2)^4\ 5 \times (7^2)^5]$

{पूर्ण वर्ग के लिए}

$= 2 \times 5\ [(2^2)^3 \times (3^2)^4 \times (5^2)^4 \times (7^2)^5]$

$\Rightarrow (3+1)\times(4+1)\times(4+1)\times(5+1)$

गुणनखण्डों की संख्या $= 4 \times 5 \times 5 \times 6 \Rightarrow 600$

■ **$2^6 \times 3^8 \times 5^{10} \times 7^{12}$ के ऐसे कितने गुणनखण्ड हैं जो पूर्ण घन हैं।**

How many factors of $2^6 \times 3^8 \times 5^{10} \times 7^{12}$ which are completely cube?

Sol. $2^6 \times 3^8 \times 5^{10} \times 7^{12}$

$\Rightarrow (2^3)^2 \times (3^3)^2 \times (5^3)^3 \times 5 \times (7^3)^4$

$\Rightarrow 3^2 \times 5[(2^3)^2 \times (3^3)^2 \times (5^3)^3 \times (7^3)^4]$

$\Rightarrow (2+1)\times(2+1)\times(3+1)\times(4+1)$

$\Rightarrow 3 \times 3 \times 4 \times 5$

$\Rightarrow 180$

■ **$2^6 \times 3^{15} \times 5^{35} \times 7^{42}$ के ऐसे कितने गुणनखण्ड हैं जो पूर्ण वर्ग के साथ-साथ पूर्ण घन भी हैं।**

How many factors of $2^6 \times 3^{15} \times 5^{35} \times 7^{42}$ which are completely square as well as completely cube?

Sol. $2^6 \times 3^{15} \times 5^{35} \times 7^{42}$

वर्ग के लिए घात (Power for square) = 2

घन के लिए घात (Power for cube) = 3

ल.स.प. (LCM) = 6

$\Rightarrow [(2^6)^1 \times (3^6)^2 \times 3^3 \times (5^6)^5 \times 5^5 \times (7^6)^7]$

$\Rightarrow 3^3 \times 5^5[(2^6)^1 \times (3^6)^2 \times (5^6)^5 \times (7^6)^7]$

$\Rightarrow (1+1)\times(2+1)\times(5+1)\times(7+1)$

$\Rightarrow [2 \times 3 \times 6 \times 8]$

$\Rightarrow [6 \times 6 \times 8]$

$\Rightarrow [36 \times 8]$

$\Rightarrow 288$

■ **$2^5 \times 3^6 \times 5^4$ के सभी गुणनखण्डों का योग ज्ञात कीजिए, जो पूर्ण वर्ग हो।**

Find the sum of all factors of $2^5 \times 3^6 \times 5^4$ that are completely square.

Sol. $2^5 \times 3^6 \times 5^4$

$\Rightarrow [2^0 + 2^2 + 2^4]\ [3^0 + 3^2 + 3^4 + 3^6]\ [5^0 + 5^2 + 5^4]$

$\Rightarrow [1 + 4 + 16]\ [1 + 9 + 81 + 729]\ [1 + 25 + 625]$

$\Rightarrow [21] \times [820] \times [651]$

$\Rightarrow 11210220$

■ **$2^5 \times 3^6 \times 5^4$ के सभी गुणनखण्डों का योग ज्ञात कीजिए जो पूर्ण घन हो।**

Find the sum of all factors of $2^5 \times 3^6 \times 5^4$ that are compeletly cube.

Sol. $2^5 \times 3^6 \times 5^4$

$\Rightarrow [2^0 + 2^3]\ [3^0 + 3^3 + 3^6]\ [5^0 + 5^3]$

$\Rightarrow [1 + 8]\ [1 + 27 + 729]\ [1+125]$

$\Rightarrow [9]\ [757]\ [126]$

$\Rightarrow 858438$

■ **90 के सभी गुणनखण्डों के व्युत्क्रम का योग ज्ञात कीजिए।**

Find the sum of reciprocal of factors of 90.

Sol. संख्या n के गुणनखण्डों के व्युत्क्रमों का योग (Sum of reciprocal of factors of n) =

$$\frac{\text{गुणनखण्डों का योग (sum of factors)}}{n}$$

$90 = 21 \times 32 \times 51$

$$\Rightarrow \frac{(2^0 + 2^1)(3^0 + 3^1 + 3^2)(5^0 + 5^1)}{90}$$

$$\Rightarrow \frac{[(1+2)(1+3+9)(1+5)]}{90}$$

$$\Rightarrow \frac{[3 \times 13 \times 6]}{90}$$

$$\Rightarrow \frac{[39 \times 6]}{90}$$

$$\Rightarrow \frac{234}{90}$$

$\Rightarrow 2.6$

■ **144 के सभी गुणनखण्डों का औसत ज्ञात करो।**

Find the average of all the factors of 144.

Sol. $$\text{औसत (Average)} = \frac{\text{गुणनखण्डों का योग (Sum of factors)}}{\text{गुणनखण्डों की संख्या (No. of factors)}}$$

गुणनखण्डों के योग के लिए (For sum of factors)–

$144 = 2^4 \times 3^2$

$\Rightarrow [(2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4)\ (3^0 + 3^1 + 3^2)]$

$\Rightarrow [(1 + 2 + 4 + 8 + 16)\ (1 + 3 + 9)]$

$\Rightarrow [(31)\ (13)]$

$\Rightarrow 403$

गुणनखण्डों की संख्या के लिए (For no. of factors)–

$\Rightarrow (4 + 1)\ (2 + 1)$

$\Rightarrow 5 \times 3$

$\Rightarrow 15$

$$\text{औसत (Average)} = \frac{403}{15}$$

$\Rightarrow 26.86$

- किसी भी पूर्ण वर्ग संख्या के गुणनखण्डों की संख्या विषम होगी। (Only a perfect square number has odd number of factors)

अथवा (or)

यदि कोई संख्या के गुणनखण्डों की संख्या विषम है, तो वह संख्या पूर्ण वर्ग होगी। (If a number has odd number of factors that means number is a perfect square).

- अभाज्य संख्या के वर्ग के मात्र 3 गुणनखण्ड होते हैं। Square of a prime number has only 3 factors.

- **2 अंकों की कितनी संख्याएं हैं जिनके केवल 3 गुणनखण्ड हैं?**

The total number of 2 digit no's which have only 3 factors?

Sol. ∵ अभाज्य संख्या के वर्ग के मात्र 3 गुणनखण्ड होते हैं। (Square of a prime number has only 3 factor)

$(5^2) = 25 \xrightarrow{\text{Factors}} 1, 5, 25$

$(7^2) = 49 \xrightarrow{\text{Factors}} 1, 7, 49$

5, 7 → अभाज्य संख्या (Prime number)

अतः 2 अंकों की 2 संख्याओं (25, 49) के 3 गुणनखण्ड होंगे। (Hence, 2, two digit no. will have 3 factors)

- **3 अंकों की कितनी संख्याएं है, जिनके केवल 3 गुणनखण्ड हैं?**

The total number of 3 digit no's which have only 3 factors?

Sol.

$(11)^2 = 121 \xrightarrow{\text{Factors}} 1, 11, 121$

$(13)^2 = 169 \xrightarrow{\text{Factors}} 1, 13, 169$

$(17)^2 = 289 \xrightarrow{\text{Factors}} 1, 17, 289$

$(19)^2 = 361 \xrightarrow{\text{Factors}} 1, 19, 361$

$(23)^2 = 529 \xrightarrow{\text{Factors}} 1, 23, 529$

$(29)^2 = 841 \xrightarrow{\text{Factors}} 1, 29, 841$

$(31)^2 = 961 \xrightarrow{\text{Factors}} 1, 31, 961$

अतः 3 अंकों की 7 संख्याओं के 3 गुणनखण्ड होंगे। (Hence, 7, three digit no. will have 3 factors).

अभाज्य गुणनखण्ड ज्ञात करना (How to find prime factor)

$$m = x^a . y^b . z^c$$

जहाँ/Where,

m ⇒ संयुक्त संख्या (Composite number)

x, y, z ⇒ अभाज्य संख्या (Prime number)

a, b, c ⇒ प्राकृतिक संख्या (Natural number)

अभाज्य गुणनखण्डों की संख्या (Number of prime factors) = a + b + c

अभाज्य गुणनखण्डों का योग (Sum of prime factors) = ax + by + cz

- **144 के सभी अभाज्य गुणनखण्डों की संख्या ज्ञात कीजिए।**

Find the total number of prime factors of 144.

Sol. $144 = 2^4 \times 3^2$

अभाज्य गुणनखण्डों की संख्या (No. of prime factors)

$= 4 + 2 \Rightarrow 6$

- **$2^5 \times 3^6 \times 7^{12}$ के सभी अभाज्य गुणनखण्डों की संख्या ज्ञात कीजिए।**

Find the total number of prime factor of $2^5 \times 3^6 \times 7^{12}$.

Sol. $2^5 \times 3^6 \times 7^{12}$

अभाज्य गुणनखण्डों की संख्या (No. of prime factors)

$= 5 + 6 + 12$

$\Rightarrow 23$

- **$6^6 \times 10^{10} \times 35^3$ के सभी अभाज्य गुणनखण्डों की संख्या ज्ञात कीजिए।**

Find the total number of prime factor of $6^6 \times 10^{10} \times 35^3$.

Sol. $6^6 \times 10^{10} \times 35^3$

$\Rightarrow (2 \times 3)^6 \times (2 \times 5)^{10} \times (5 \times 7)^3$

$\Rightarrow 2^6 \times 3^6 \times 2^{10} \times 5^{10} \times 5^3 \times 7^3$

अभाज्य गुणनखण्डों की संख्या (No. of prime factors)

$= (6 + 6 + 10 + 10 + 3 + 3)$

$\Rightarrow (12 + 20 + 6)$

$\Rightarrow (18 + 20)$

$\Rightarrow 38$

- **$2^3 \times 3^4 \times 5^6$ के सभी अभाज्य गुणनखण्डों का योग ज्ञात कीजिए।**

Find sum of all the prime factors of $2^3 \times 3^4 \times 5^6$.

Sol. $2^3 \times 3^4 \times 5^6$

$\Rightarrow (2 + 2 + ... 3 \text{ times}) + (3 + 3 + ... 4 \text{ times}) + (5 + 5 + ... 6 \text{ times})$

$\Rightarrow (2 \times 3) + (3 \times 4) + (5 \times 6)$

$\Rightarrow 6 + 12 + 30$

$\Rightarrow 48$

शेषफल प्रमेय (Remainder Theorem)

भाजक (divisor) d) भाज्य (Dividend) D (भागफल (quotient) q

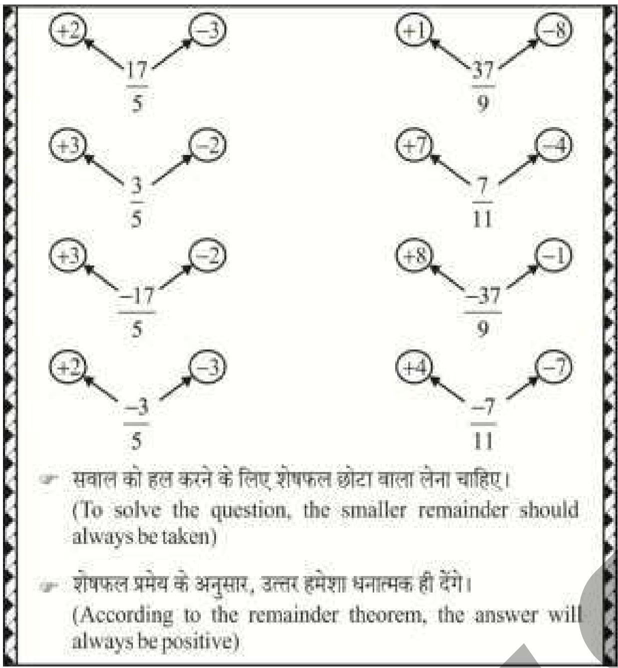
शेषफल (remainder) r

$$D = dq + r$$

जहाँ/Where,

$\{d > r \geq 0\}$

आधारीय शेषफल प्रमेय
(Basic remainder theorem)

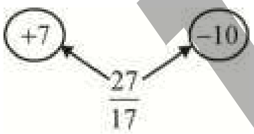


■ **शेषफल ज्ञात करो।/Find the remainder :**

$$\mathbf{\frac{70 \times 100 \times 65 \times 1735 \times 87}{17}}$$

Sol. $\frac{\overset{(+2)}{70} \times \overset{(-2)}{100} \times \overset{(-3)}{65} \times \overset{(+1)}{1735} \times \overset{(+2)}{87}}{17}$

$\frac{(+2)\times(-2)\times(-3)\times(+1)\times(+2)}{17} \quad \frac{24}{17}$



अतः/ Hence,

शेषफल (Remainder) = **+7**

$1! = 1$
$2! = 2 \times 1$
$3! = 3 \times 2 \times 1$
$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1$
$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$
$\mathbf{5! = 5 \times 4!}$
⋮
$\mathbf{n! = n(n-1)!}$

■ $\mathbf{\frac{1!+2!+3!+4!+5!+6!........1000!}{10}}$

Sol. $\frac{1!+2!+3!+4!+5!+6!........1000!}{10}$

$= \frac{1+(2\times1)+(3\times2\times1)+(4\times3\times2\times1)+(5\times4\times3\times2\times1)........1000!}{10}$

$\frac{\overset{+1}{1}+\overset{+2}{2}+\overset{-4}{6}+\overset{+4}{24}+\overset{0}{120}+........\overset{0}{1000!}}{10}$

$\Rightarrow \frac{1+2-4+4}{10} \quad = \frac{3}{10}$

शेषफल (Remainder) = **3**

■ **शेषफल ज्ञात करो।/Find the remainder :**

$\mathbf{\frac{1!+2!+3!+4!+5!..........1000!}{12}}$

$\Rightarrow \frac{\overset{1}{1}+\overset{+2}{2}+\overset{+6}{6}+\overset{0}{24}+\overset{0}{120}+...........\overset{0}{1000!}}{12}$

$\Rightarrow \frac{1+2+6+0+......0}{12} \Rightarrow \frac{9}{12}$

शेषफल (Remainder) = **9**

■ **शेषफल ज्ञात करो।/Find the remainder :**

$\mathbf{\frac{1!+2!+3!+4!+5!+6!.........1000!}{18}}$

Sol. $\frac{1!+2!+3!+4!+5!+6!.........1000!}{18}$

$\Rightarrow \frac{\overset{+1}{1}+\overset{+2}{2}+\overset{+6}{6}+\overset{+6}{24}+\overset{-6}{120}+\overset{0}{720}.\overset{+}{+}..........\overset{0}{1000!}}{18}$

$= \frac{1+2+6+6-6}{18} = \frac{9}{18}$

शेषफल (Remainder) = **9**

☞ Factorial function में, यदि किसी संख्या से भाग दिया जाए तो एक बार शेषफल शून्य आने पर, आगे भी शेषफल शून्य आता रहेगा।/In factorial fuction, if divide by any number then remainder will come zero one's further zero will come to.

अंतिम (इकाई) अंक और अंतिम दो अंक निकालना
(To find last (unit) digit and last two digits)

■ किसी संख्या में 10 से भाग देने पर, जो शेषफल प्राप्त होगा, वह उस संख्या का अंतिम अंक (इकाई का अंक) होगा।
The remainder obtained by dividing a number by 10 will be the last (unit) digit of the number.

■ किसी संख्या में 100 से भाग देने पर, जो शेषफल प्राप्त होगा वह उस संख्या के अंतिम दो अंक होगा।
The remainder obtained by dividing a number by 100 will be the last two digits of that number.

■ **अंतिम (इकाई) अंक ज्ञात कीजिए/Find the last (unit) digit-**

$\mathbf{1!+2!+3!+4!+5!+6!........1000!}$

Sol. अंतिम अंक के लिए (For last digit)−

$\frac{1!+2!+3!+4!+5!+6!.........1000!}{10}$

TEAM SPY

$= \dfrac{1+(2\times1)+(3\times2\times1)+(4\times3\times2\times1)+(5\times4\times3\times2\times1)........1000!}{10}$

$\dfrac{\overset{+1}{1}+\overset{+2}{2}+\overset{-4}{6}+\overset{+4}{24}+\overset{0}{120}+........\overset{0}{1000!}}{10}$

$\Rightarrow \dfrac{1+2-4+4}{10} = \dfrac{3}{10}$

∵ शेषफल (Remainder) = **3**

∴ अंतिम अंक (Last digit) = **3**

- **अंतिम दो अंक ज्ञात कीजिए/Find the last two digits-**
  103 × 1298 × 13702 × 1197

Sol. अंतिम दो अंक के लिए (For last two digits)–

$\dfrac{103\times1298\times13702\times1197}{100}$

$\dfrac{\overset{+3}{103}+\overset{-2}{1298}+\overset{+2}{13702}+\overset{-3}{1197}}{100}$

$\dfrac{(+3)\times(-2)\times(+2)\times(-3)}{100} \quad \dfrac{36}{100}$

∵ शेषफल (Remainder) = **36**

∴ अंतिम अंक (Last digit) = **36**

सरलीकरण का प्रयोग (Use of simplification)

- भिन्न की अभिव्यक्ति को सरल बनाने के लिए, अंश और हर के हिस्सों को जितना हो सके उतना छोटा करने का प्रयास करना चाहिए। फिर वास्तविक शेष प्राप्त करने के लिए, अंतिम शेष को जितने गुणक से छोटा किया गया उसका गुणा करेंगे।
  For simplification of the expression of the fraction, to cancel out parts of the numerator and denominator as much as you can, then final remainder to be multiplied by the canceled number to get the actual remainder.

$\dfrac{35}{15} \xrightarrow{\text{Remainder}} +5, \quad -10$

By simplification,

If we write, $\dfrac{35}{15} \xrightarrow[\text{by 5}]{\text{Simplify}} \dfrac{7}{3} \xrightarrow{\text{Remainder}} +1, \quad -2$

Hence, $+1, \quad -2$

$\downarrow \quad \downarrow$

$+1\times5 \quad -2\times5$

वास्तविक शेषफल (Actual remainder) $\longrightarrow +5 \quad -10$

- **अंतिम दो अंक ज्ञात कीजिए/Find the last two digits-**
  13978 × 398 × 53 × 76 × 27

Sol. अंतिम दो अंक के लिए (For last two digits)–

$\dfrac{13978\times398\times53\times76\times27}{100}$

Simplify by 4,

$\dfrac{13978\times398\times53\times\overset{19}{\cancel{76}}\times27}{\underset{25}{\cancel{100}}}$

$\dfrac{\overset{+3}{13978}\times\overset{-2}{398}\times\overset{+3}{53}\times\overset{-6}{19}\times\overset{+2}{27}}{25}$

$\dfrac{(+3)\times(-2)\times(+3)\times(-6)\times(+2)}{25}$

$\dfrac{216}{25}$ Remainder $16, \quad 9$

वास्तविक शेषफल (Actual remainder)

$= +16\times4, \quad -9\times4$ {∵ simplify by 4}

$= +64, \quad -36$ (शेषफल हमेशा धनात्मक लेते हैं)

(Take remainder always positive)

अतः/Hence,

अंतिम दो अंक (Last two digits) = 64

चक्रीय या प्रतिरूप प्रमेय (Cyclicity or pattern theorem)

- चक्रीय प्रमेय के अनुसार, शेषफल एक निश्चित अंतराल के बाद एक संख्या से विभाजित होने पर खुद को दोहराते हैं।
  According to the cyclicity or pattern theorem, remainders repeat themselves after a certain interval when divided by a number.

☞ शेषफल 1 आने के बाद, चक्रीयता की पुनरावृत्ति होती है।
After the remainder is 1, there is a repetition of the cyclicity.

शेषफल	शेषफल
$\frac{2^1}{7}=\frac{2}{7}\Rightarrow 2$	$\frac{2^4}{7}=\frac{16}{7}\Rightarrow 2$
$\frac{2^2}{7}=\frac{4}{7}\Rightarrow 4$	$\frac{2^5}{7}=\frac{32}{7}\Rightarrow 4$
$\frac{2^3}{7}=\frac{8}{7}\Rightarrow 1$	$\frac{2^6}{7}=\frac{64}{7}\Rightarrow 1$

चक्रीयता (Cyclicity) = 3

☞ शेषफल –1 से +1 बनाने के लिए चक्रीयता को दोगुना कर देते हैं।/To change the remainder from –1 to +1, the cyclicity is doubled.

शेषफल

$\frac{3^1}{7}=\frac{3}{7}\Rightarrow 3, \quad -4$

$\frac{3^2}{7}=\frac{9}{7}\Rightarrow 2, \quad -5$

$\frac{3^3}{7}=\frac{27}{7}\Rightarrow 6, \quad -1$

Remainder = –1 then power = 3

$\downarrow \qquad \downarrow \times 2$

Remainder = +1 then power = 6

चक्रीयता (Cyclicity) = 6

■ **शेषफल ज्ञात कीजिए।/Find the remainder.**

$$\frac{\mathbf{37^{100}}}{\mathbf{7}}$$

Sol. $\frac{37^{100}}{7}$

$\because$ cyclicity = 3

$\Rightarrow \frac{2^{100}}{7}$ $\quad \frac{100}{3} \xrightarrow{\text{Remainder}} 1$

$\Rightarrow \frac{2^1}{7} = \frac{2}{7}$

शेषफल (Remainder) = 2

यूलर की शेषफल प्रमेय (Euler's Remainder Theorem)

■ **यूलर का टोशेंट संख्या (Euler's Totient Number)–** संख्या x के यूलर टोशेंट संख्या, x से छोटी व x के साथ सहभाज्य होगी। (Euler's totient number of x is of numbers which are less than x and co-prime to x).

Ex. 12 के टोशेंट (Totient of 12) = 1, 5, 7, 11

$\therefore$ टोशेंट संख्या (Totient number) = 4

$\Rightarrow 12(\phi) = 4$

■ **टोशेंट संख्या निकालना (Find the totient number)–**

☞ If $n = a \times b$

{a, b → अभाज्य गुणनखण्ड (prime factors)}

$$\therefore \boxed{n(\phi) = n\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)}$$

☞ If $n = a^2 \times b^3 \times c^5$

{a, b, c → अभाज्य गुणनखण्ड (prime factors)}

$$\therefore \boxed{n(\phi) = n\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right)}$$

☞ If n is a prime number –:

$n \to n$

$$n(\phi) = n\left(1-\frac{1}{n}\right)$$

$$n(\phi) = \frac{n(n-1)}{n}$$

$$\boxed{n(\phi) = (n-1)}$$

अतः अभाज्य संख्याओं की टोशेंट संख्या उससे एक कम होती है।

Hence, the totient number of prime number is less than 1 that number.

यूलर की शेषफल प्रमेय (Euler's Remainder Theorem)

$$\frac{x^{y(\phi)}}{y} \xrightarrow{\text{Remainder}} 1$$

जहाँ

(x, y) → सह अभाज्य संख्याएँ (co-prime numbers)

y (ϕ) → यूलर टोशेंट नम्बर (Euler totient number)

■ **शेषफल निकालिए/Find the remainder :**

$$\frac{\mathbf{13^8}}{\mathbf{15}}$$

Sol. $\frac{13^8}{15}$

($\because$ 13, 15 → सह अभाज्य/Co-prime)

$\Rightarrow \frac{13^{15(\phi)}}{15}$

Remainder = 1

For totient number,

$\because 15 = 3 \times 5$

$$15(\phi) = 15\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)$$

$$= 15 \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{5}$$

$$15(\phi) = 8$$

फरमेट्स प्रमेय (Fermatas theorem)

$$\frac{a^{p-1}}{p} \xrightarrow{\text{Remainder}} 1$$

जहाँ/Where,

{P → अभाज्य संख्या (Prime number); P, a → सह-अभाज्य संख्या (Co-prime number)}

■ **शेषफल ज्ञात कीजिए/Find the remainder :**

$$\frac{\mathbf{a^p}}{\mathbf{p}}$$

Sol. $\frac{a^p}{p}$

$\Rightarrow \frac{a^{p-1}.a^1}{p}$

$\Rightarrow \frac{1.a}{p} = \frac{a}{p} \xrightarrow{\text{Remainder}} a$

■ **शेषफल ज्ञात कीजिए/Find the remainder :**

$$\frac{\mathbf{a^p - a}}{\mathbf{p}}$$

Sol. $\frac{a^p - a}{p}$ $\quad \frac{a.a^{p-1} - a}{p}$

$= \frac{a-a}{p}$ $\quad \frac{0}{p}$ $\quad$ Remainder $\quad 0$

■ **शेषफल ज्ञात कीजिए/Find the remainder :**

$$\frac{2^{72}}{73}$$

Sol. $\frac{2^{72}}{73}$

$\Rightarrow \frac{2^{72-1}}{73} \Rightarrow \frac{a^{P-1}}{p}$ (फरमेट्स प्रमेय से)

शेषफल = 1

73 → अभाज्य संख्या (Prime number)

(2, 73) → सह अभाज्य संख्याएँ (Co-prime number)

■ **शेषफल ज्ञात कीजिए/Find the remainder :**

$$\frac{2^{100}}{101}$$

Sol. $\frac{2^{100}}{101}$

$\Rightarrow \frac{2^{101-1}}{101} = \frac{a^{P-1}}{P}$

= Remainder = +1

101 → अभाज्य संख्या (Prime number)

(2, 101) → सह अभाज्य संख्या (Co-prime number)

विलसन प्रमेय (Wilson theorem)

$$\frac{(P-1)!}{P} \xrightarrow{\text{Remainder}} (P-1)$$

जहाँ/Where,

$\{P \rightarrow$ अभाज्य संख्या (Prime number)$\}$

■ **शेषफल ज्ञात कीजिए/ Find the remainder :**

$$\frac{18!}{19}$$

Sol. $\frac{18!}{19}$

$\Rightarrow \frac{(19-1)!}{19} \xrightarrow{\text{Remainder}} (19-1) = 18$

■ **शेषफल ज्ञात कीजिए/ Find the remainder :**

$$\frac{17!}{19}$$

Sol. माना $\frac{17!}{19} \xrightarrow{\text{Remainder}} x$

∵ हम जानते है कि (We know that),

$\Rightarrow \frac{18!}{19} \xrightarrow{\text{Remainder}} 18$

$\Rightarrow \frac{18 \times 17!}{19} \xrightarrow{\text{Remainder}} 18$

18 x

↖ Remainder ↗

$\Rightarrow \frac{18 \times 17!}{19} \xrightarrow{\text{Remainder}} 18$

$\therefore\ 18 \times x = 18$

$x = 1$

$\therefore \frac{17!}{18} \xrightarrow{\text{Remainder}} 1$

चाइनीज शेषफल प्रमेय (Chinese remainder theorem)

■ चाइनीज शेषफल प्रमेय के अनुसार, यदि कोई पूर्णांक n के यूक्लिडियन विभाजन के अवशेषें को कई पूर्णांकों से जानता है, तो इन पूर्णांकों के उत्पाद द्वारा n के विभाजन के शेष को विशिष्ट रूप से निर्धारित किया जा सकता है, इस शर्त के तहत कि विभाजक जोड़ीदार सह अभाज्य है।

According to Chinese remainder theorem, one knows the remainders of the euclidean division of an integer n by several integers, then one can determine uniquely the remainder of the division of n by the product of these integers, under the condition that the divisors are pariwise coprime.

☞

$\frac{X^y}{N} \Rightarrow R,\quad N = a \times b \times c$

$\frac{X^y}{a} \rightarrow R$

$\frac{X^y}{b} \rightarrow R$

$\frac{X^y}{c} \rightarrow R$

Remainder is same in all cases

☞

$\frac{X^y}{N} \Rightarrow R,\quad N = a \times b \times c$

$\frac{X^y}{a} \rightarrow R_1$

$\frac{X^y}{b} \rightarrow R_2$

$\frac{X^y}{c} \rightarrow R_3$

Common remainder = R

$R = (a - R_1) = (b - R_2) = (c - R_3)$

☞

$\frac{N}{D} \Rightarrow R,\quad D = a \times b \times c$

$\frac{N}{a} \rightarrow R_1,\quad a)N(x \;\; R_1$

$\frac{N}{b} \rightarrow R_2,$

$\frac{N}{c} \rightarrow R_3,$

$R = ax + R_1 = by + R_2 = cz + R_3$

[Where as, $(a - R_1) \neq (b - R_2) \neq (c - R_3)$]

बहुपद शेषफल प्रमेय
(Polynomial Remainder Theorem)

- एक या एक से अधिक घात वाले बहुपद P(x) में, रैखिक बहुपद (x – a) से भाग देने पर शेषफल P(a) होता है।
  Dividing a polynomial P(x) of degree one or more by the linear polynomial (x – a) gives the remainder P(a).

Ex. $P(x) = x^3 + 2x^2 - x + 1$ को (x – 2) से भाग देने पर शेषफल ज्ञात कीजिए

Sol. $\because$ भाजक (divisor) = (x – 2)

$\therefore (x-2) = 0 \Rightarrow x = 2$

x का मान बहुपद में रखने पर,

$$\begin{aligned} P(x) &= x^3 + 2x^2 - x + 1 \\ &= (2)^3 + 2(2)^2 - 2 + 1 \\ &= 8 + 8 - 2 + 1 \end{aligned}$$

शेषफल (Remainder) = 15

- **गुणनखण्ड प्रमेय (Factor theorem)–** एक या एक से अधिक घात वाले बहुपद P(x) में रैखिक बहुपद (x – a) से भाग देने पर शेषफल P(a) का मान 0 होता है।

Ex. $P(x) = x^3 + 2x^2 - x + 1$ का (x – 2) गुणनखण्ड है कि नही !

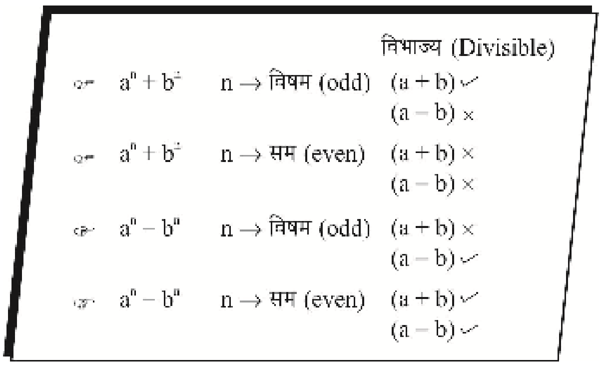
Sol. $\because$ भाजक (divisor) = (x – 2)

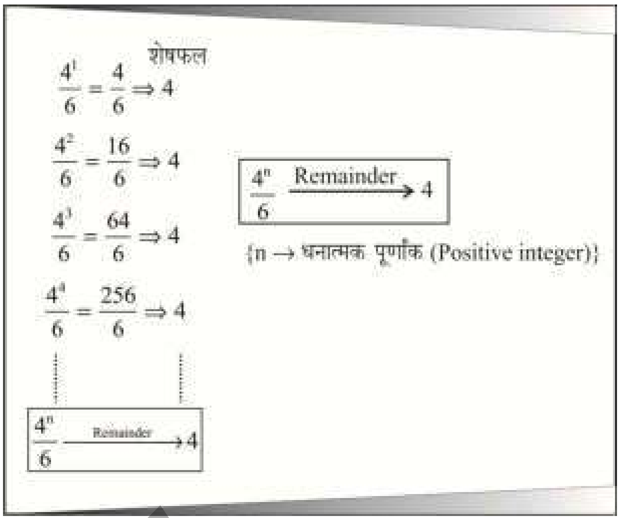
$\therefore (x-2) = 0 \Rightarrow x = 2$

x का मान बहुपद में रखने पर,

$$\begin{aligned} P(x) &= x^3 + 2x^2 - x + 1 \\ &= (2)^3 + 2(2)^2 - 2 + 14 \\ &= 8 + 8 - 2 + 14 \\ &= 16 - 16 \\ &= 0 \end{aligned}$$

अतः (x – 2), $x^3 + 2x^2 - x + 1$ का एक गुणनखण्ड है।





ल.स.प. और म.स.प. (L.C.M. and H.C.F.)

गुणज (अपवर्त्य) और गुणनखण्ड (अपवर्तक) में अंतर
(Difference between multiple and factor)

क्र. सं. S. N.	गुणज (Multiple)	गुणनखण्ड (Factor)
1.	गुणज को अन्य संख्याओं से गुणा करने पर प्राप्त संख्याओं के रूप में परिभाषित किया जाता है। The multiples are defined as the numbers obtained when multiplied by other numbers	गुणनखण्डों को दी गई संख्या के सटीक विभाजक के रूप में परिभाषित किया जाता है। Factors are defined as the exact divisors of the given number
2.	गुणकों की संख्या अनंत है। The number of multiples is infinte	गुणनखण्डों की संख्या सीमित है। The number of factors is finite
3.	गुणज ज्ञात करने के लिए उपयोग की जाने वाली क्रिया गुणन है। The operation used to find the multiples is a multiplication.	गुणनखण्डों को ज्ञात करने के लिए प्रयोग की जाने वाली क्रिया विभाजन है। The operation used to find the factors is a division
4.	गुणजों का परिणाम दी गई संख्या से अधिक या उसके बराबर होना चाहिए। The outcome of the multiples should be greater than or equal to the given number	गुणनखण्डों का परिणाम दी गई संख्या से कम या उसके बराबर होना चाहिए। The outcome of the factors should be less than or equal to the given number.

TEAM SPY

ल.स.प. (L.C.M.)

ल.स.प. → लघुत्तम समापवर्त्य (सबसे छोटा उभयनिष्ठ गुणज)

(L.C.M.) → Least common multiple

- ल.स.प. वह छोटी से छोटी संख्या है, जो दो या दो से अधिक संख्याओं से पूर्णतः विभाजित होती है।
  L.C.M. is the smallest number which is completely divided by two or more numbers.
- x, y, z का ल.स.प., x, y और z से पूर्णतः विभाजित होगा।
  The LCM of x, y and z is completely divisible by x, y, and z.

■ **12 और 16 का ल.स.प. (L.C.M. of 12 and 16)–**

12 के गुणज (Multiple) = 12, 24, 36, **48**, 60, 72, 84, **96**, ...

16 के गुणज (Multiple) = 16, 32, **48**, 64, 80, **96**, 112, 128, ...

उभयनिष्ठ गुणज (Common multiple) = 48, 96

सबसे छोटा उभयनिष्ठ गुणज (Least common multiple) = 48

ल.स.प. (L.C.M.) = 48

ल.स.प. ज्ञात करने के विधियाँ (Methods of finding L.C.M.)

■ **विभाजन विधि (Division Method)–** इस विधि में दी गई संख्याओं को उभयनिष्ठ अभाज्य संख्या से तब तक विभाजित करें कि शेषफल 1 न हो जाये।

In this method, divide the given numbers by common prime number until the remainder is 1.

Ex. 9, 12 और 15 का ल.स.प. ज्ञात करें/Finding the L.C.M. of 9, 12 and 15

Sol.

2	9, 12, 15
2	9, 6, 15
3	9, 3, 15
3	3, 1, 5
5	1, 1, 5
	1, 1, 1

ल.स.प. (L.C.M.) = 2 × 2 × 3 × 3 × 5 = **180**

■ **अभाज्य गुणनखण्ड विधि (Prime Factor Method)–** पहले दी गई संख्याओं को अभाज्य गुणनखण्डों के रूप में व्यक्त कीजिए। उच्चतम घात वाले गुणनखण्ड का गुणनफल ल.स.प. होगा।

First express the given numbers in the form of prime factors. The product of factors with highest power will be the L.C.M.

Ex. 9, 12 और 15 का ल.स.प. ज्ञात करें/Finding the L.C.M. of 9, 12 and 15

Sol. 9 = 3 × 3

12 = 2 × 2 × 3

15 = 3 × 5

ल.स.प. (L.C.M.) = 2 × 2 × 3 × 3 × 5

= **180**

प्रश्नों के प्रकार (Types of questions)

➢	वह न्यूनतम संख्या ज्ञात कीजिए जो x, y, z से पूर्णतः विभक्त हो। Find the smallest no. which is exactly divsible by x, y, z.	**(x, y, z) का ल.स.प.** **L.C.M. of (x, y, z)**
➢	वह न्यूनतम संख्या ज्ञात कीजिए जो x, y, z से पूर्णतः भाग देने पर प्रत्येक दशा में शेष r प्राप्त हो। Find the smallest no. which when divided by x, y, z leaves remainder 'r' in each case.	**(x, y, z) का ल.स.प. + r** **L.C.M. of (x, y, z) + r**
➢	वह न्यूनतम संख्या ज्ञात कीजिए जो x, y, z से पूर्णतः भाग देने पर शेषफल क्रमशः a, b, c प्राप्त हो। Find the smallest no. which when divided by x, y, z leaves remainder a, b, c respectively.	**(x, y, z) का ल.स.प. – k** **L.C.M. of (x, y, z) – k** जहाँ/Where, k = (x – a) = (y – b) = (z – c)

म.स.प. (H.C.F.)

म.स.प. → महत्तम समापवर्तक (सबसे बड़ा उभयनिष्ठ गुणनखण्ड)

(H.C.F.) → Highest common factor (Greatest common divider)

- म.स.प. वह बड़ी से बड़ी सख्या है, जो दो या दो से अधिक संख्याओं को पूर्णतः विभाजित करे।
  H.C.F is the largest number, which can divide two or more numbers completely.
- (x, y, z) का म.स.प., x, y और z को पूर्णतः विभाजित करेगा।
  The HCF of x, y and z will divide x, y, and z completely.

■ **12 और 16 का म.स.प. (H.C.F. of 12 and 16)–**

12 के गुणनखण्ड (Factor) = **1**, **2**, 3, **4**, 6, 12

16 के गुणनखण्ड (Factor) = **1**, **2**, **4**, 8, 16

उभयनिष्ठ गुणनखण्ड (Common factor) = 1, 2, 4

सबसे बड़ा उभयनिष्ठ गुणनखण्ड (Highest common factor) = 4

म.स.प. (H.C.F.) = 4

म.स.प. ज्ञात करने के विधियाँ
(Methods of finding H.C.F.)

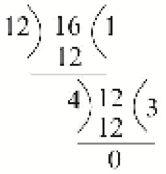
■ **विभाजन विधि (Division Method)–** दो संख्याओं x और y का महत्तम समापर्तक निकालिए। (Find the H.C.F. of two number x and y.) (जहाँ/Where, $y > x$)

y को x से भाग देने पर शेषफल r_1 रह जाता है। फिर x को r_1 से भाग देने पर शेषफल r_2 होता है। फिर r_1 को r_2 से विभाजित किया जाता है। यह प्रक्रिया तब तक दोहराई जाएगी जब तक शेषफल शून्य न हो जाए। अंतिम भाजक x और y का महत्तम समापर्तक होगा।

On dividing y by x remainder is r_1. Then on dividing x by r_1 the remainder is r_2. Then r_1 is divided by r_2. This process will be repeated until the remainder becomes zero. Last divisor will be the H.C.F. of x and y.

Ex. 12 और 16 का म.स.प. ज्ञात करें/Finding the H.C.F. of 12 and 16 :

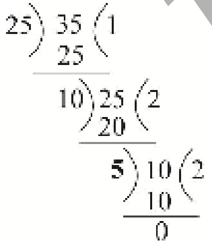
Sol. 12, 16 का म.स.प. (H.C.F.)

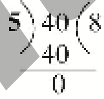


म.स.प. (H.C.F.) = 4

Ex. 25, 35 और 40 का म.स.प. ज्ञात करें/Finding the H.C.F. of 25, 35 and 40 :

Sol. 25, 35 और 40 का म.स.प. (H.C.F.)





म.स.प. (H.C.F.) = 5

■ **अभाज्य गुणनखण्ड विधि (Prime factor method)–** पहले, प्रत्येक दी गई संख्या को उनके अभाज्य गुणनखण्डों के गुणनफल के रूप में लिखिए। कम से कम घात वाले सामान्य गुणज का गुणनफल दी गई संख्याओं का महत्तम समापवर्तक होगा।

First, write each given numbers in the form of product of their prime factors. The product of common factors with least power will be the H.C.F. of given numbers.

Ex. 12 और 16 का म.स.प. ज्ञात करें/Finding the H.C.F. of 12 and 16 :

Sol. 12, 16 का म.स.प. (H.C.F.)

$12 = 2 \times 2 \times 3 \Rightarrow 2^2 \times 3$

$16 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \Rightarrow 2^4$

म.स.प. (H.C.F.) = $2^2 \Rightarrow 4$

Ex. 25, 35 और 40 का म.स.प. ज्ञात करें/Finding the H.C.F. of 25, 35 and 40 :

Sol. 25, 35 और 40 का म.स.प. (H.C.F.)

$25 = 5 \times 5 \Rightarrow 5^2$

$35 = 5 \times 7 \Rightarrow 5^1 \times 7^1$

$40 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 \Rightarrow 2^3 \times 5^1$

म.स.प. (H.C.F.) = 5

■ **अंतर विधि (Difference method)–**

माना (Let),

दो संख्याओं का म.स.प. (H.C.F. of two numbers) = h

तब संख्याएं (numbers) = hx, hy

जहाँ/Where, x, y → सहअभाज्य (Co-prime)

अंतर (Difference) = hx – hy

$\Rightarrow$ **h (x – y)**

☞ (x – y) = 1 → म.स.प. संख्याओं के बीच का अंतर होगा। H.C.F. is a difference between numbers.

☞ (x – y) > 1 → म.स.प. संख्याओं के बीच का अंतर का एक गुणनखण्ड होगा। (H.C.F. is a factor of difference of numbers).

☞ दो संख्याओं का म.स.प. उनके अंतर से कभी बड़ा नहीं हो सकता। (H.C.F. of two numbers never greater than difference of these numbers).

अतः म.स.प. संख्याओं का अंतर या अंतर का गुणनखण्ड हो सकता है।

Hence, H.C.F. can be either difference of these number or factor of difference.

Ex. 30 और 45 का म.स.प. ज्ञात करें/Finding the H.C.F. of 30 and 45 :

Sol. 30, 45 का म.स.प. (H.C.F.)

30, 45

अंतर (difference) = 45 – 30 $\Rightarrow$ 15

म.स.प. (H.C.F.) = 15 or factor of 15

∵ 30 और 45, 15 से पूर्णतः विभाजित है। (30 and 45 are completely divisible by 15)

अतः/Hence, म.स.प. (H.C.F) = 15

TEAM SPY

प्रश्नों के प्रकार (Types of questions)

➢	वह बड़ी से बड़ी संख्या ज्ञात कीजिए जो x, y, z को पूर्णतः विभक्त करे। Find the largest no. which can divide x, y, z. exactly	**(x, y, z) का म.स.प. H.C.F. of (x, y, z)**
➢	वह बड़ी से बड़ी संख्या ज्ञात करो जिससे x, y, z में भाग देने पर प्रत्येक दशा में समान शेष बचे। Find the largest no. which can divide x, y, z and leaves same remainder in each case.	**(x– y), (y –z), (z – x) का म.स.प. H.C.F. of (x– y), (y –z), (z – x)**
➢	वह बड़ी से बड़ी संख्या ज्ञात करो, जिससे x, y, z में भाग देने पर प्रत्येक दशा में 'r' शेष बचे। Find the largest no. which can divide x, y, z and leaves remainder 'r' in each case.	**(x– r), (y – r), (z – r) का म.स.प. H.C.F. of (x– r), (y –r), (z – r)**
➢	वह बड़ी से बड़ी संख्या ज्ञात करो जिससे x, y, z में भाग देने पर क्रमशः a, b, c शेष बचे। Find the largest number which can divide x, y, z and leaves remainder a, b, c respectively.	**(x– a), (y –b), (z – c) का म.स.प. H.C.F. of (x– a), (y –b), (z – c)**

■ यदि दो संख्याओं को उनके अंतर से या अंतर के गुणनखण्ड से भाग दिया जाए तो समान शेषफल प्राप्त होता है।

If two numbers are divided by their difference or factors of difference then leaves same remainder.

■ **यदि 225 और 147 को एक दो अंकीय संख्या से भाग दिया जाता है। तो प्रत्येक दशा में समान शेष बचता है। तब ऐसी कितनी दो अंकीय संख्याएं होगी?**

A two digit number can divide 225 and 147, leaves same remainder in each case. How many such two digit numbers would be possible?

Sol.

225 147

अंतर गुणनखण्ड (दो अंकीय)

78 → 78, 39, 26, 13

कुल संख्याएं = 4

■ **दो संख्याएं 875 और 2272 को एक तीन अंकीय संख्या से भाग दिया जाता है। तब प्रत्येक दिशा में समान शेष बचता है। ऐसी तीन अंकीय संख्या के अंकों का योग क्या होगा?**

The two numbers 875 and 2272 are divided by a three digit number. Then there is same remainder left in each case what will be the sum of the digits of such three digits?

Sol.

875 2272

Difference → 1397

11 × 127 → Prime number

HCF = 127

अंकों का योग (Sum of digits) = 1 + 2 + 7 ⇒**10**

ल.स.प. और म.स.प. में सम्बन्ध (Relation between L.C.M. and H.C.F.

■ पहली संख्या × दूसरी संख्या = ल.स.प. × म.स.प.

(First no. × second no. = L.C.M × H.C.F.)

☞ यदि/If H.C.F. = h

First no. = hx

Second no. = hy

तब/then, L.C.M. = hxy

भिन्नों का ल.स.प. और म.स.प. (L.C.M. and H.C.F. of fraction)

■ भिन्न का ल.स.प. = $\frac{\text{अंश का ल.स.प.}}{\text{हर का म.स.प.}}$

$$\text{L.C.M. of fraction} = \frac{\text{L.C.M. of numerator}}{\text{H.C.F. of denominator}}$$

■ भिन्न का म.स.प. = $\frac{\text{अंश का म.स.प.}}{\text{हर का ल.स.प.}}$

$$\text{H.C.F. of fraction} = \frac{\text{H.C.F. of numerator}}{\text{L.C.M. of denominator}}$$

घातांकों का ल.स.प. और म.स.प. (L.C.M. and H.C.F. of indices)

■ जब दी गई संख्याओं का आधार समान हो, तो उच्चतम घात वाली संख्या दी गई संख्याओं का लघुत्तम समापवर्तक होगी।

When the base of the given numbers are same, then the number with highest power will be the LCM of the given numbers.

Ex. $7^2, 7^4, 7^9$ का ल.स.प. (L.C.M.) = 7^9

- जब आधार समान न हो और आधार में कोई उभयनिष्ठ गुणनखण्ड न हो, तो दी गई संख्याओं का गुणनफल ल.स.प. होगा।

  When the base is not same and there is no common factors in the base, then the product of given numbers will be the LCM.

Ex. $2^2, 3^5, 5^4$ का ल.स.प. (L.C.M.) = $2^2 \times 3^5 \times 5^4$

- जब दी गई संख्या का आधार समान हो, तो सबसे कम घात वाली संख्या दी गई संख्याओं का म.स.प. होगा।

  When the base of the given number are same, then the number with least power will be the H.C.F. of given numbers.

Ex. $7^2, 7^4, 7^9$ का म.स.प. (H.C.F.) = 7^2

- जब आधार समान न हो और आधार में कोई उभयनिष्ठ गुणनखण्ड न हो, तो दी गई संख्याओं का म.स.प. 1 होगा।

  When the base is not same and there is no common factor in the base, then the required H.C.F. of given numbers will be 1.

Ex. $2^2, 3^5, 5^4$ का म.स.प. (H.C.F.) = 1

☞ $(p^a + 1), (p^b + 1)$

H.C.F. $(p^{HCF(a,b)} + 1)$ L.C.M. $(p^{LCM(a,b)} - 1)$

जहाँ, घात म.स.प. की विषम गुणज होना चाहिए।
(Where, power (a, b) should be odd multiple of HCF).

☞ $(p^a - 1), (p^b - 1)$

H.C.F. $(p^{HCF(a,b)} - 1)$ L.C.M. $(p^{LCM(a,b)} - 1)$

करणी और घातांक (Surds and Indies)

करणी (Surds) : $\sqrt[n]{a}$

$\sqrt{\ } \rightarrow$ करणी (Radical)
$n \rightarrow$ करणी घात (Order of surd)
$a \rightarrow$ करणी आधार (Radicand)

☞ **पूर्ण करणी (Entire surds) :**
$\sqrt{a}$, $(\sqrt{a} + \sqrt{b})$

☞ **मिश्र करणी (Mixed surds) :**
$a\sqrt{b}$

☞ **समरूप करणी (Like & Similar surds) :**
$x\sqrt{b}$, $y\sqrt{b}$, $z\sqrt{b}$

☞ **विषमरूपी करणी (Unlike & unsimilar surds) :**
$x\sqrt{b}$, $y\sqrt{c}$, $z\sqrt{d}$

☞ **संयुग्मी करणी (Conjugate surds) :**
$\sqrt{7} + \sqrt{5} \xrightarrow[\text{(Conjugate)}]{\text{संयुग्मी}} \sqrt{7} - \sqrt{5}$
$\sqrt{4} - \sqrt{3} \xrightarrow[\text{(Conjugate)}]{\text{संयुग्मी}} \sqrt{4} + \sqrt{3}$

संयुग्मी करणियों का गुणा एक परिमेय संख्या होती है।
Product of conjugate surds is a rational number.

☞ **द्विघात करणी (Quadratic surds) :**
$a + \sqrt{b}$, $\sqrt{a} + \sqrt{b} + c$

☞ **समीकरण सम्बन्ध करणी (Equation related surds)-**

यदि करणी (If the surds), $a + +\sqrt{b} = c + \sqrt{d}$

तब (then), $a = c$, $b = d$

अतः एक पक्ष का परिमेय भाग, दूसरे पक्ष के परिमेय भाग के बराबर होगा। एक पक्ष का अपरिमेय भाग, दूसरे पक्ष के अपरिमेय भाग के बराबर होगा।

Hence, the rational part of one side is equal to the rational part of other side and the irrational part of one side is equal to the irrational part of other side.

परिमेयकरण (Rationalization)–

करणी (Surds)	परिमेयकरण गुणनखण्ड (Rationalization factor)
$\sqrt{a} + \sqrt{b}$	$\sqrt{a} - \sqrt{b}$
$\sqrt{a} - \sqrt{b}$	$\sqrt{a} + \sqrt{b}$
$a + \sqrt{b}$	$a - \sqrt{b}$
$a - \sqrt{b}$	$a + \sqrt{b}$
$a^{2/3} + b^{2/3} - a^{1/3}b^{1/3}$	$(a^{1/3} + b^{1/3})$
$a^{2/3} + b^{2/3} + a^{1/3}b^{1/3}$	$(a^{1/3} - b^{1/3})$

करणी और घातांक के नियम
(Law of surds and indices)

- $a \times a \times a \times$ .... m पदों तक $= a^m$
  $a \times a \times a \times$ .... n पदों तक $= a^n$
- $(a \times a \times$ .... m पदों तक$) \times (a \times a \times$ .... n पदों तक$)$
  $= a^m \times a^n$
  $\Rightarrow \boxed{a^{m+n}}$

TEAM SPY

- $\dfrac{a \times a \times a \times \text{........m पदों तक}}{a \times a \times a \times \text{........n पदों तक}} = \dfrac{a^m}{a^n} \Rightarrow \boxed{a^{m-n}}$

■ यदि $a > 0$, $a \neq 1$ तथा m, n, p पूर्णांक (integer) हो तो–

- $a^m \times a^n = a^{m+n}$
- $a^m \times a^n \times a^p = a^{m+n+p}$
- $\left(a^m\right)^n = a^{mn}$
- $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
- $a^0 = 1$
- $a^{-m} = \dfrac{1}{a^m}$
- $a^{m^n} = a^{\left(m^n\right)}$
- $a^{m^{n^p}} = a^{m^{\left(n^p\right)}} = a^{m^{\left(n^p\right)}}$
- $(ab)^n = a^n b^n$
- $(abc)^n = a^n b^n c^n$
- If $a^n = y$ then $a = y^{1/n}$

  If $a^x = b^y$ then $a = b^{y/x}$

  If $a^x = b^y$ then $a^{1/y} = b^{1/x}$
- $x^n = a \Rightarrow x = \sqrt[n]{a}$, $(a \in R, a \geq 0)$
- यदि n एक विषम घन पूर्णांक है तथा $a > 0$ तो–

  $\sqrt[n]{-a} = \sqrt[n]{a}$

  If $m, n \geq 2$, and $a, b > 0$ then–
- $\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$
- $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = a^{m/n}$
- $\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab} = (ab)^{1/n}$
- $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$
- $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \left(a^{1/m}\right)^{1/n} = a^{1/mn}$
- $\sqrt[n]{a}.\sqrt[m]{a} = a^{1/n}.a^{1/m}$

  $\Rightarrow a^{1/n+1/m}$

  $\Rightarrow a^{\frac{m+n}{mn}} \quad \sqrt[mn]{a^{(m+n)}}$
- $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[m]{a}} = \dfrac{a^{1/n}}{a^{1/m}} = a^{\frac{1}{n}-\frac{1}{m}} \quad a^{\frac{m-n}{mn}}$

  $\Rightarrow \sqrt[mn]{a^{(m-n)}}$
- $\sqrt[z]{\left(\sqrt[y]{\left(\sqrt[x]{a}\right)^p}\right)^q}^{\,r} = a^{\frac{pqr}{xyz}}$

वर्गमूल ज्ञात करना (Find square root)

- $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$
- $\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2 = a + b + 2\sqrt{ab}$
- $(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$
- $\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 = a + b - 2\sqrt{ab}$
- $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$
- $\left(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}\right)^2 = a + b + c + 2\sqrt{ab} + 2\sqrt{bc} + 2\sqrt{ca}$
- $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

■ **वर्गमूल ज्ञात करो। (Find the square root)–**

$11 + 2\sqrt{30}$

Sol.

$\sqrt{11 + 2\sqrt{30}}$

$5 + 6 \quad 5 \times 6$

$\sqrt{\left(\sqrt{5}\right)^2 + \left(\sqrt{6}\right)^2 + 2\sqrt{5} \times \sqrt{6}}$

$\sqrt{\left(\sqrt{5} + \sqrt{6}\right)^2}$

$\left(\sqrt{5} + \sqrt{6}\right)$

■ **वर्गमूल ज्ञात करो। (Find the square root)–**

$13 + 2\sqrt{30}$

Sol.

$\sqrt{13 + 2\sqrt{30}}$

$10 + 3 \quad 10 \times 3$

$\sqrt{\left(\sqrt{10} + \sqrt{3}\right)^2}$

$\left(\sqrt{10} + \sqrt{3}\right)$

■ **वर्गमूल ज्ञात करो। (Find the square root)–**

$17 - 2\sqrt{30}$

Sol.

$\sqrt{17 - 2\sqrt{30}}$

$15 + 2 \quad 15 \times 2$

$\sqrt{\left(\sqrt{15} - \sqrt{2}\right)^2}$

$\left(\sqrt{15} - \sqrt{2}\right)$

■ **वर्गमूल ज्ञात करो। (Find the square root)–**

$8 - 2\sqrt{7}$

Sol.

$\sqrt{8 - 2\sqrt{7}}$

$7 + 1 \quad 7 \times 1$

$\sqrt{\left(\sqrt{7} - \sqrt{1}\right)^2}$

$\left(\sqrt{7} - \sqrt{1}\right)$

■ वर्गमूल ज्ञात करो। (Find the square root)–

$\mathbf{12+\sqrt{140}}$

Sol. $\sqrt{12+\sqrt{140}}$

$\sqrt{12+2\sqrt{35}}$
$7+5 \quad 7\times 5$

$\sqrt{\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)^2}$

$\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)$

■ वर्गमूल ज्ञात करो। (Find the square root)–

$\mathbf{8-\sqrt{60}}$

Sol. $\sqrt{8-\sqrt{60}}$

$\sqrt{8-2\sqrt{15}}$
$5+3 \quad 5\times 3$

$\sqrt{\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)^2}$

$\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)$

■ वर्गमूल ज्ञात करो। (Find the square root)–

$\mathbf{7+4\sqrt{3}}$

Sol. $\sqrt{7+4\sqrt{3}}$

$\sqrt{7+2\sqrt{12}}$

$\sqrt{7+2\sqrt{12}}$
$4+3 \quad 4\times 3$

$\sqrt{\left(\sqrt{4}+\sqrt{3}\right)^2}$

$\left(2+\sqrt{3}\right)$

■ वर्गमूल ज्ञात करो। (Find the square root)–

$\mathbf{12-6\sqrt{3}}$

Sol. $\sqrt{12-6\sqrt{3}}$

$\sqrt{12-2\sqrt{27}}$

$\sqrt{12-2\sqrt{27}}$
$9+3 \quad 9\times 3$

$\sqrt{\left(\sqrt{9}-\sqrt{3}\right)^2}$

$\left(3-\sqrt{3}\right)$

■ वर्गमूल ज्ञात करो। (Find the square root)–

$\mathbf{3+\sqrt{5}}$

Sol. $\sqrt{3+\sqrt{5}}$

$\sqrt{\frac{2}{2}\left(3+\sqrt{5}\right)}$

$\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{6+2\sqrt{5}}$

$\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{6+2\sqrt{5}}$
$5+1 \quad 5\times 1$

$\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\left(\sqrt{5}+1\right)^2}$

$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{5}+1\right)$

■ वर्गमूल ज्ञात करो। (Find the square root)–

$\mathbf{4-\sqrt{15}}$

Sol. $\sqrt{4-\sqrt{15}}$

$\sqrt{\frac{2}{2}\left(4-\sqrt{15}\right)}$

$\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{8-2\sqrt{15}}$

$\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{8-2\sqrt{15}}$
$5+3 \quad 5\times 3$

$\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)^2}$

$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)$

■ वर्गमूल ज्ञात करो। (Find the square root)–

$\mathbf{15+\sqrt{60}+\sqrt{84}+\sqrt{140}}$

Sol. $\sqrt{15+\sqrt{60}+\sqrt{84}+\sqrt{140}}$

$\sqrt{15+2\sqrt{15}+2\sqrt{21}+2\sqrt{35}}$

$\sqrt{15+2.\sqrt{3}.\sqrt{5}+2.\sqrt{5}.\sqrt{7}+2.\sqrt{7}.\sqrt{3}}$

$\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+\left(\sqrt{5}\right)^2+\left(\sqrt{7}\right)^2+2.\sqrt{3}.\sqrt{5}+2.\sqrt{5}.\sqrt{7}+2.\sqrt{7}.\sqrt{3}}$

$\sqrt{\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}\right)^2}$

$\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}\right)$

TEAM SPY

कुछ महत्त्वपूर्ण परिणाम
(Some important results)

- If, $x=\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a........\infty}}}}$

  then, $\boxed{x=a}$

- If, $x=\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a...........n\text{ times}}}}$

  then, $\boxed{x=a^{\frac{2^n-1}{2^n}}}$

- If, $x=\sqrt[n]{a\times\sqrt[n]{a\times\sqrt[n]{a..........\infty}}}$

  then, $\boxed{x=\sqrt[(n-1)]{a}}$

- If, $x=\sqrt[n]{a\div\sqrt[n]{a\div\sqrt[n]{a\div..........\infty}}}$

  then, $\boxed{x=\sqrt[(n+1)]{a}}$

- If, $x=\sqrt{a+b\sqrt{a+b\sqrt{a+...........\infty}}}$

  then, $\boxed{x=\frac{\sqrt{4a+b^2}+b}{2}}$

- If, $x=\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+.............\infty}}}$

  then, $\boxed{x=\frac{\sqrt{4a+1}+1}{2}}$

- If, $x=\sqrt{a-b\sqrt{a-b\sqrt{a-..........\infty}}}$

  then, $\boxed{x=\frac{\sqrt{4a+b^2}-b}{2}}$

- If, $x=\sqrt{a-\sqrt{a-\sqrt{a-..........\infty}}}$

  then, $\boxed{x=\frac{\sqrt{4a+1}-1}{2}}$

- If, $x=\sqrt{a+b\sqrt{a-b\sqrt{a+b\sqrt{a-............\infty}}}}$

  then, $\boxed{x=\frac{\sqrt{4a-3b^2}+b}{2}}$

- If, $x=\sqrt{a+\sqrt{a-\sqrt{a+\sqrt{a-............\infty}}}}$

  then, $\boxed{x=\frac{\sqrt{4a-3}+1}{2}}$

- If, $x=\sqrt{a-b\sqrt{a+b\sqrt{a-b\sqrt{a+b\sqrt{a-...........\infty}}}}}$

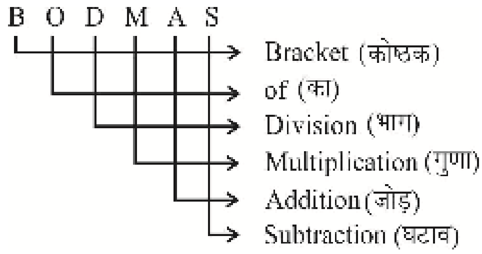
  then, $\boxed{x=\frac{\sqrt{4a-3b^2}-b}{2}}$

- If, $x=\sqrt{a-\sqrt{a+\sqrt{a-\sqrt{a+\sqrt{a-...........\infty}}}}}$

  then, $\boxed{x=\frac{\sqrt{4a-3}-1}{2}}$

सरलीकरण (Simplification)

BODMAS नियम (Rule) :



☞ कोष्ठकों को अंदर से बाहर की ओर हल करते हैं। (Solve the brackets from inside to outside).

कोष्ठकों के प्रकार (Types of brackets) :

- रेखा कोष्ठक (Line/Bar bracket) → ——
- छोटा कोष्ठक (Circular/Small/Open bracket) → **( )**
- मध्यम या मझला कोष्ठक (Curly/Braces bracket) → **{ }**
- बड़ा कोष्ठक (Square/Closed bracket) → **[ ]**

■ **हल कीजिए (To solve) :**

$$\mathbf{222-\frac{1}{3}\text{ of }\left\{42+\left(56-\overline{8+9}\right)\right\}+108}$$

Sol. $222-\frac{1}{3}\text{ of }\left\{42+\left(56-\overline{8+9}\right)\right\}+108$

$222-\frac{1}{3}\text{ of }\{42+(56-17)\}+108$

$\Rightarrow 222-\frac{1}{3}\text{ of }\{42+39\}+108$

$\Rightarrow 222-\frac{1}{3}\text{ of }\{81\}+108$

$\Rightarrow 222-\frac{1}{3}\text{ of }81+108$

$\Rightarrow 222-[27+108]$

$\Rightarrow 222-135$

$\Rightarrow \mathbf{87}$

■ **हल कीजिए (To solve) :**

$$\mathbf{a-\ b-\left\{c-\left(a-\overline{b-c}\right)\right\}}$$

Sol. $a-\ b-\left\{c-\left(a-\overline{b-c}\right)\right\}$

$\Rightarrow a-\ b-\{c-(a-b+c)\}$

$\Rightarrow a-[b-\{c-a+b-c\}]$

$\Rightarrow a-[b-\{b-a\}]$

$\Rightarrow a-[b-b+a]$

$\Rightarrow a-[a]$

$\Rightarrow \mathbf{0}$

■ हल कीजिए (To solve) :

19170 ÷ 54 ÷ 5

Sol. 19170 ÷ 54 ÷ 5

$\Rightarrow \quad 19170 \times \frac{1}{54} \times \frac{1}{5}$

$\Rightarrow \quad \frac{355}{5}$

$\Rightarrow$ **71**

■ हल कीजिए (To solve) :

$\mathbf{\frac{9}{13} \div \frac{18}{26} \div \frac{90}{52}}$

Sol. $\frac{9}{13} \div \frac{18}{26} \div \frac{90}{52}$

$\Rightarrow \quad \frac{9}{13} \times \frac{26}{18} \times \frac{52}{90}$

$\Rightarrow \quad \mathbf{\frac{26}{45}}$

■ हल कीजिए (To solve) :

5.8 + (7.4 ÷ 3.7 × 5) – 6 × 2 ÷ 2.5

Sol. 5.8 + (7.4 ÷ 3.7 × 5) – 6 × 2 ÷ 2.5

$\Rightarrow \quad 5.8 + (2 \times 5) - 6 \times \frac{2}{2.5}$

$\Rightarrow$ 5.8 + 10 – 4.8

$\Rightarrow$ 15.8 – 4.8

$\Rightarrow$ **11**

श्रृंखला पर आधारित प्रश्न (Question based on series)

- $\frac{1}{a \times b} = \frac{1}{(b-a)}\ \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$
- $\frac{1}{a \times b \times c} = \frac{1}{(c-a)}\ \frac{1}{ab} - \frac{1}{bc}$
- $\frac{1}{a \times b \times c \times d} = \frac{1}{(d-a)}\ \frac{1}{abc} - \frac{1}{bcd}$
- $1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + 4 \times 5 + \ldots\ldots\ldots + n(n+1)$
  $= \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

■ मान ज्ञात कीजिए (Find the value) :

$\mathbf{\frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} + \frac{1}{56} + \frac{1}{72} + \frac{1}{90}}$

Sol. $\frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} + \frac{1}{56} + \frac{1}{72} + \frac{1}{90}$

$\Rightarrow \quad \frac{1}{4 \times 5} + \frac{1}{5 \times 6} + \frac{1}{6 \times 7} + \frac{1}{7 \times 8} + \frac{1}{8 \times 9} + \frac{1}{9 \times 10}$

$\Rightarrow \quad \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \frac{1}{9} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10}$

$= \frac{1}{4} - \frac{1}{10}$

$= \frac{5-2}{20} \quad \mathbf{\frac{30}{20}}$

■ मान ज्ञात कीजिए (Find the value) :

$\mathbf{\frac{1}{1 \times 4} + \frac{1}{4 \times 7} + \frac{1}{7 \times 10} + \frac{1}{10 \times 13} + \frac{1}{13 \times 16} = ?}$

Sol. $\frac{1}{1 \times 4} + \frac{1}{4 \times 7} + \frac{1}{7 \times 10} + \frac{1}{10 \times 13} + \frac{1}{13 \times 16}$

$\Rightarrow \quad \frac{1}{3}\ \frac{3}{1 \times 4} + \frac{3}{4 \times 7} + \frac{3}{7 \times 10} + \frac{3}{10 \times 13} + \frac{3}{13 \times 16}$

$\Rightarrow \quad \frac{1}{3}\ \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \frac{7}{7} - \frac{1}{10} + \frac{1}{10} - \frac{1}{13} + \frac{1}{13} - \frac{1}{16}$

$\Rightarrow \quad \frac{1}{3}\ \frac{1}{1} - \frac{1}{16}$

$\Rightarrow \quad \frac{1}{3}\ \frac{16-1}{16}$

$= \frac{1}{3} \times \frac{15}{16} \quad \mathbf{\frac{5}{16}}$

■ मान ज्ञात कीजिए (Find the value) :

$\mathbf{\frac{2}{15} + \frac{4}{45} + \frac{7}{144} + \frac{9}{400} = ?}$

Sol. $\frac{2}{15} + \frac{4}{45} + \frac{7}{144} + \frac{9}{400}$

$\Rightarrow \quad \frac{2}{3 \times 5} + \frac{4}{5 \times 9} + \frac{7}{9 \times 16} + \frac{9}{16 \times 25}$

$\Rightarrow \quad \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{9} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \frac{1}{16} - \frac{1}{25}$

$= \frac{1}{3} - \frac{1}{25}$

$= \frac{25-3}{75} \quad \mathbf{\frac{22}{75}}$

■ मान ज्ञात कीजिए (Find the value) :

$\mathbf{\frac{3}{1^2.2^2} + \frac{5}{2^2.3^2} + \frac{7}{3^2.4^2} + \frac{9}{4^2.5^2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \frac{19}{9^2.10^2}}$

Sol. $\frac{3}{1^2.2^2} + \frac{5}{2^2.3^2} + \frac{7}{3^2.4^2} + \frac{9}{4^2.5^2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \frac{19}{9^2.10^2}$

$\frac{3}{1 \times 4} + \frac{5}{4 \times 9} + \frac{7}{9 \times 16} + \frac{9}{16 \times 25} \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{19}{81 \times 100}$

$\Rightarrow \quad \frac{1}{1} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{9} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \frac{1}{16} - \frac{1}{25} \ldots\ldots \frac{1}{81} - \frac{1}{100}$

$\Rightarrow \quad \frac{1}{1} - \frac{1}{100} \Rightarrow \quad \mathbf{\frac{99}{100}}$

■ मान ज्ञात कीजिए (Find the value) :

$\mathbf{1 + \frac{1}{2} \quad 1 + \frac{1}{3} \quad 1 + \frac{1}{4} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 1 + \frac{1}{n} \quad = ?}$

Sol. $1 + \frac{1}{2} \quad 1 + \frac{1}{3} \quad 1 + \frac{1}{4} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 1 + \frac{1}{n}$

$\frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \frac{5}{4} \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{(n-1)}{n}$

$= \mathbf{\frac{(n+1)}{2}}$

TEAM SPY

■ **मान ज्ञात कीजिए (Find the value) :**

$$\mathbf{1-\frac{1}{2}\quad 1-\frac{1}{3}\quad 1-\frac{1}{4}\ ....\ 1-\frac{1}{n}\ = ?}$$

Sol. $1-\frac{1}{2}\quad 1-\frac{1}{3}\quad 1-\frac{1}{4}\ ....\ 1-\frac{1}{n}$

$\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times........\frac{(n-1)}{n}$

$\Rightarrow \mathbf{\frac{1}{n}}$

■ **मान ज्ञात कीजिए (Find the value) :**

$$\mathbf{1-\frac{1}{3^2}\quad 1-\frac{1}{4^2}\quad 1-\frac{1}{5^2}\ .....\ 1-\frac{1}{11^2}\quad 1-\frac{1}{12^2}}$$

Sol. $1-\frac{1}{3^2}\quad 1-\frac{1}{4^2}\quad 1-\frac{1}{5^2}\ .....\ 1-\frac{1}{11^2}\quad 1-\frac{1}{12^2}$

$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

$1+\frac{1}{3}\quad 1-\frac{1}{3}\quad 1+\frac{1}{4}\quad 1-\frac{1}{4}\ ....$

$.....\ 1+\frac{1}{11}\quad 1-\frac{1}{11}\quad 1+\frac{1}{12}\quad 1-\frac{1}{12}$

$\Rightarrow\ 1+\frac{1}{3}\quad 1+\frac{1}{4}\quad 1+\frac{1}{5}\ .....\ 1+\frac{1}{12}\quad\times$

$1-\frac{1}{3}\quad 1-\frac{1}{4}\quad 1-\frac{1}{5}\ .....\ 1-\frac{1}{12}$

$\left[\frac{4}{3}\times\frac{5}{4}\times\frac{6}{5}.........\frac{13}{12}\right]\left[\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times.........\frac{11}{12}\right]$

$\Rightarrow\ \frac{13}{3}\times\frac{2}{12}$

$\Rightarrow\ \frac{13}{3}\times\frac{1}{6}$

$\Rightarrow\ \mathbf{\frac{13}{18}}$

■ **मान ज्ञात कीजिए (Find the value) :**

$$\mathbf{\frac{2\times8+8\times32+18\times72+..........}{1+16+81+..............}^{\frac{1}{4}} = ?}$$

Sol. $\frac{2\times8+8\times32+18\times72+..........}{1+16+81+..............}^{\frac{1}{4}}$

$\Rightarrow\ 16\ \frac{1+16+81+........}{1+16+81+........}^{\frac{1}{4}}$

$\Rightarrow\ [16]^{\frac{1}{4}}$

$\Rightarrow\ 2^4\ ^{\frac{1}{4}}\quad \mathbf{2}$

■ **मान ज्ञात कीजिए (Find the value) :**

$$\mathbf{\frac{1.2.4+2.4.8+3.6.12+.........}{1.3.9+2.6.18+3.9.27+.......}^{\frac{1}{3}}}$$

Sol. $\frac{1.2.4+2.4.8+3.6.12+.........}{1.3.9+2.6.18+3.9.27+.......}^{\frac{1}{3}}$

$\Rightarrow\ \frac{8}{27}^{\frac{1}{3}}$

$= \mathbf{\frac{2}{3}}$

चर घातांकी श्रेणी (Exponential Series)

$$\mathbf{e = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+........\quad 2.71828}$$

■ **मान ज्ञात कीजिए (Find the value) :**

$$\mathbf{\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{1.2.3.4}+\frac{1}{1.2.3.4.5}+............}$$

Sol. $\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+.............$

$1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+..........\ -\ 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}$

$= (2.71828) - (1 + 1 + 0.5)$

$= \mathbf{0.21828}$

■ **मान ज्ञात कीजिए (Find the value) :**

$$\mathbf{\frac{8!\times7!\times6!}{9!\times5!\times3!} = ?}$$

Sol. $\frac{8!\times7\times6\times5!\times6\times5\times4\times3!}{9\times8!\times5!\times3!}$

$\Rightarrow 28\times20$

$\Rightarrow \mathbf{560}$

■ **6! के रूप में मान ज्ञात कीजिए (Find the value in the form of 6!) :**

[8! - 7! - 6!]

Sol. [8! - 7! - 6!]

$\Rightarrow\ [8\times7\times6! - 7\times6! - 6]$

$\Rightarrow\ 6!\,[8\times7 - 7 - 1]$

$\Rightarrow\ 6!\,[56 - 8]$

$\Rightarrow\ \mathbf{6![48]}$

■ **यदि a * b = 2(a + b) तब 1 * [2 * 3] का मान क्या होगा?**

If a * b = 2(a + b) then find the value 1 * [2 * 3]

Sol. 1 * [2 * 3]

$\Rightarrow\ 1 * [2\,(2+3)]$

$\Rightarrow\ 1 * [2\times5]$

$\Rightarrow\ 1 * 10$

$\Rightarrow\ 2\,[1+10]$

$\Rightarrow\ 2\times11$

$= \mathbf{22}$

■ यदि x * y = 3x + 2y तब 2 * 3 + 3 * 4 का मान क्या होगा?

If x * y = 3x + 2y then find the value 2 * 3 + 3 * 4

Sol.
2 * 3 + 3 * 4
↓ ↓ ↓ ↓
x y x y

$\Rightarrow (3\times2+2\times3)+(3\times3+2\times4)$

$\Rightarrow (6+6)+(9+8)$

$= 12 + 17 = \mathbf{29}$

■ **यदि @ एक ऐसी संक्रिया है कि (If @ is an operation such that)**

$$a @ b = \begin{cases} 2a \text{ यदि } > b \\ a+b \text{ यदि } a < b \\ a^2 \text{ यदि } = b \end{cases}$$

then, $\dfrac{(5@7)+(4@4)}{3(5@5)-(15@11)-3} = ?$

Sol. $\dfrac{(5+7)+(4)^2}{3(5)^2-(2\times15)-3}$

$\Rightarrow \dfrac{12+16}{75-30-3}$

$\Rightarrow \dfrac{28}{75-33}$

$\Rightarrow \dfrac{28}{42} = \mathbf{\dfrac{2}{3}}$

■ **मान ज्ञात कीजिए (Find the value) :**

$999\dfrac{995}{999}\times999$

Sol. $999\dfrac{995}{999}\times999$

$\Rightarrow 999+\dfrac{995}{999}\ 999$

$\Rightarrow (1000-1)+\dfrac{995}{999}\ 999$

$\Rightarrow \dfrac{(1000-1)999+995}{999}\times999$

$\Rightarrow 999000-999+995$

$= 999000 - 4 = \mathbf{998996}$

■ **मान ज्ञात कीजिए (Find the value) :**

$999\dfrac{1}{9}+999\dfrac{2}{7}+999\dfrac{3}{7}+999\dfrac{4}{7}+999\dfrac{5}{7}+999\dfrac{6}{7}$

Sol. $999\dfrac{1}{9}+999\dfrac{2}{7}+999\dfrac{3}{7}+999\dfrac{4}{7}+999\dfrac{5}{7}+999\dfrac{6}{7}$

$\Rightarrow (999\times6)+\dfrac{1}{7}+\dfrac{2}{7}+\dfrac{3}{7}+\dfrac{4}{7}+\dfrac{5}{7}+\dfrac{6}{7}$

$\Rightarrow (1000-1)6+\dfrac{21}{7}$

$= 6000 - 6 + 3$

$= 6000 - 3 = \mathbf{5997}$

■ **मान ज्ञात कीजिए (Find the value) :**

$3\dfrac{1}{3}+33\dfrac{1}{3}+333\dfrac{1}{3}+3333\dfrac{1}{3}+33333\dfrac{1}{3}$

Sol. $3\dfrac{1}{3}+33\dfrac{1}{3}+333\dfrac{1}{3}+3333\dfrac{1}{3}+33333\dfrac{1}{3}$

$\Rightarrow (3+33+333+3333+33333)+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}$

$= 37035+\dfrac{5}{3} \Rightarrow 37035+1\dfrac{2}{3}$

$= 37036+\dfrac{2}{3} \Rightarrow \mathbf{37036\dfrac{2}{3}}$

सतत भिन्न (Continuous fraction)

■ **हल कीजिए (To solve) :**

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{5}}}}$$

Sol. Step-1 : सबसे पहले अंतिम भिन्न $\dfrac{2}{5}$ लिखें

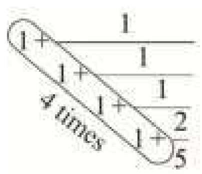
Write the last fraction $\dfrac{2}{5}$ first

Step-2 : पहले अंश (2) लिखें फिर हर (5) लिखें

Write the numerator (2) first then the denominator (5).

Step-3 : जितनी बार प्रश्न में 1 दिया हो उतनी बार आगे संख्याएं आएगी, और अगली संख्या ज्ञात करने के लिए तुरंत पिछले वाली संख्या को उस संख्या में जोड़ें।

Next number will appear as many times as one is given in the question and to find the next number, immediately add the previous number to that number.



$2,\ 5 \xrightarrow{5+2} (7) \xrightarrow{7+5} (12) \xrightarrow{12+7} (19) \xrightarrow{19+12} (31)$

$\Rightarrow \mathbf{\dfrac{31}{19}}$

■ **हल कीजिए (To solve) :**

$$1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{1-\cfrac{2}{5}}}}$$

TEAM SPY

Sol.

$2,\ 5 \xrightarrow{5-2} (3) \xrightarrow{3-5} (-2) \xrightarrow{-2-3} (-5) \xrightarrow{-5-(-2)} (-3)$

अतः भिन्न $= \frac{-3}{-5}$ $\frac{3}{5}$

■ **हल कीजिए (To solve) :**

$$1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4}}}$$

Sol. $1,\ 4 \xrightarrow{\times 3+1} (13) \xrightarrow{\times 2+4} (30) \xrightarrow{\times 1\ 13} (43)$

अतः भिन्न $= \frac{43}{30}$

■ **हल कीजिए (To solve) :**

$$1-\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{3-\cfrac{1}{4}}}$$

Sol. $1,\ 4 \xrightarrow{\times 3-1} (11) \xrightarrow{\times 2-4} (18) \xrightarrow{\times 1-11} (7)$

■ **मान ज्ञात कीजिए (Find the value) a+ b + c :**

$$\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c}}} = \frac{13}{29}$$

Sol.

13) 29 (2 − a
 26
 3) 13 (4 − b
 12
 1) 3 (3 − c
 3
 ×

$\therefore$ a + b + c = 2 + 4 + 3

a + b + c = 9

■ **मान ज्ञात कीजिए (Find the value) a+ b + c :**

$$\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{2}}}} = \frac{16}{23}$$

Sol.

16) 23 (1 = a
 16
 7) 16 (2 = b
 14
 2) 7 (3 = c
 6
 1

$\because$ Last term $= \frac{1}{2}$

$\therefore$ a + b + c = 1 + 2 + 3 $\Rightarrow$ **6**

■ **आवर्त दशमलव (Recurring decimal) :**

➢ $0.\bar{a} = \frac{a}{9}$ ➢ $0.\overline{ab} = \frac{ab}{99}$

➢ $0.\overline{abc} = \frac{abc}{999}$ ➢ $0.a\bar{b} = \frac{ab-a}{90}$

➢ $0.ab\bar{c} = \frac{abc-ab}{900}$ ➢ $0.a\overline{bc} = \frac{abc-a}{990}$

■ **मान ज्ञात कीजिए (Find the value) $8.5\overline{46} + 5.\overline{927}$:**

Sol.

$8.5\overline{46} + 5.\overline{927} = ?$

2 संख्याओं में बार 3 संख्याओं में बार

2, 3 LCM = 6 (With bar)

☞ परिणाम में 6 संख्याओं में बार होगा।

☞ दशमलव के बाद एक संख्या में बार नहीं होगा, दोनों में से, जिसमें अधिकतम संख्याओं में बार न हो वही संख्या लेते हैं

अतः Without bar = 1, With bar = 6

Without bar	With bar	
8.5	4 6 4 6 4 6	4 6 4 6 4 .....
5.9	2 7 9 2 7 9	2 7 9 2 7 .....
14.4	7 4 3 9 2 5	7 4 3 9 1

$= 14.4\overline{743925}$

■ **मान ज्ञात कीजिए (Find the value)**

$8.3\bar{1} + 0.\bar{6} + 0.00\bar{2} = ?$

Sol.

Without bar = 2

With bar = 1, 1, 1 LCM = 1

Without bar	With bar	
8.31	1	1 1 1 ....
0.66	6	6 6 6 ....
0.00	2	2 2 2 ....
8.97	9	9 9 9

$\Rightarrow$ **$8.97\bar{9}$**

■ **मान ज्ञात कीजिए (Find the value)**

$22.\bar{4} + 11.5\overline{67} - 33.5\bar{9} = ?$

Sol. Without bar = 1

With bar = 1, 2, 1 LCM = 2

Without bar	With bar	
22.4	4 4	4 4 ....
+11.5	6 7	6 7 ....
−33.5	9 9	9 9 ....
0.4	1 2	1 2

पहाड़ा (Tables)

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	29	31	36	37	41	43
4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34	36	38	40	42	44	46	48	50	58	62	72	74	82	86
6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39	42	45	48	51	54	57	60	63	66	69	72	75	87	93	108	111	123	129
8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48	52	56	60	64	68	72	76	80	84	88	92	96	100	116	124	144	148	164	172
10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90	95	100	105	110	115	120	125	145	155	180	185	205	215
12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72	78	84	90	96	102	108	114	120	126	132	138	144	150	174	186	216	222	246	258
14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84	91	98	105	112	119	126	133	140	147	154	161	168	175	203	217	252	259	287	301
16	24	32	40	48	56	64	72	80	88	96	104	112	120	128	136	144	152	160	168	176	184	192	200	232	248	288	296	328	344
18	27	36	45	54	63	72	81	90	99	108	117	126	135	144	153	162	171	180	189	198	207	216	225	261	279	324	333	369	387
20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150	160	170	180	190	200	210	220	230	240	250	290	310	360	370	410	430

वर्ग (Square)

1 - 1	11 - 121	21 - 441	31 - 961	41 - 1681	51 - 2601	61 - 3721	71 - 5041	81 - 6561	91 - 8281
2 - 4	12 - 144	22 - 484	32 - 1024	42 - 1764	52 - 2704	62 - 3844	72 - 5184	82 - 6724	92 - 8464
3 - 9	13 - 169	23 - 529	33 - 1089	43 - 1849	53 - 2809	63 - 3969	73 - 5329	83 - 6889	93 - 8649
4 - 16	14 - 196	24 - 576	34 - 1156	44 - 1936	54 - 2916	64 - 4096	74 - 5476	84 - 7056	94 - 8836
5 - 25	15 - 225	25 - 625	35 - 1225	45 - 2025	55 - 3025	65 - 4225	75 - 5625	85 - 7225	95 - 9025
6 - 36	16 - 256	26 - 676	36 - 1296	46 - 2116	56 - 3136	66 - 4356	76 - 5776	86 - 7396	96 - 9216
7 - 49	17 - 289	27 - 729	37 - 1369	47 - 2209	57 - 3249	67 - 4489	77 - 5929	87 - 7569	97 - 9409
8 - 64	18 - 324	28 - 784	38 - 1444	48 - 2304	58 - 3364	68 - 4624	78 - 6084	88 - 7744	98 - 9604
9 - 81	19 - 361	29 - 841	39 - 1521	49 - 2401	59 - 3481	69 - 4761	79 - 6241	89 - 7921	99 - 9801
10 - 100	20 - 400	30 - 900	40 - 1600	50 - 2500	60 - 3600	70 - 4900	80 - 6400	90 - 8100	100 - 10000

घन (Cube)

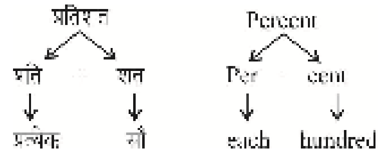
1 - 1	6 - 216	11 - 1331	16 - 4096	21 - 9261	26 - 17576	31 - 29791	36 - 46656	41 - 68921	46 - 97336
2 - 8	7 - 343	12 - 1728	17 - 4913	22 - 10648	27 - 19683	32 - 32768	37 - 50653	42 - 74088	47 - 103823
3 - 27	8 - 512	13 - 2197	18 - 5832	23 - 12167	28 - 21952	33 - 35937	38 - 54872	43 - 79507	48 - 110592
4 - 64	9 - 729	14 - 2744	19 - 6859	24 - 13824	29 - 24389	34 - 39304	39 - 59319	44 - 85184	49 - 117649
5 - 125	10 - 1000	15 - 3375	20 - 8000	25 - 15625	30 - 27000	35 - 42875	40 - 64000	45 - 91125	50 - 125000

वर्गमूल (Square root)		वर्ग दर्पण (Square mirror)	मात्रक (Units)			समय का रूपांतरण (Conversion of time)
2 - 1.4142	13 - 3.6056	$14^2+87^2=78^2+41^2$	1 foot = 30.48 cm	1 km = 1000 m.	1 million = 10^6	10 years = decade
3 - 1.7321	17 - 4.1231	$15^2+75^2=57^2+51^2$	1 foot = 12 inches	1 mile = 1.6093 km	1 billion = 10^9	25 years = silver jubilee
5 - 2.2361	19 - 4.3589	$17^2+84^2=48^2+71^2$	1 inch = 2.54 cm	1 are = 100 m^2	1 trillion = 10^{12}	50 years = golden jubilee
7 - 2.6458	23 - 4.7958	$26^2+97^2=79^2+62^2$	1 yard = 3 feet	1 hectare = 10000 m^2	1 m^3 = 1000 lit.	60 years = diamond jubilee
11 - 3.3166	29 - 5.3852	$27^2+96^2=69^2+72^2$	1 chain = 22 yard	1 acre = 4047 m^2	1000 cm^3 = 1 lit.	75 years = platinum jubilee

TEAM SPY

02

प्रतिशत
(Percentage)



$\therefore$ प्रतिशत (Percent) $= \frac{1}{100} \Rightarrow \% = \frac{1}{100}$

अतः "प्रतिशत एक ऐसी भिन्न है जिसका हर 100 होता है।"
अर्थात किसी वस्तु को 100 बराबर भागों में बाँटना।
"Percentage is the fraction which denominator is 100."
i.e. divide an object into 100 equal parts.

प्रतिशत को भिन्न में बदलना
(Change the percentage in to the fraction)

प्रतिशत को भिन्न में बदलने के लिए % के स्थान पर $\frac{1}{100}$ लिखते हैं।

To convert a percent in to a fraction, substitute $\frac{1}{100}$ in the place of %.

$1\% = \frac{1}{100}$ $\quad$ $10\% = \frac{1}{10}$ $\quad$ $100\% = 1$

$2\% = 2\times\frac{1}{100} = \frac{1}{50}$ $\quad$ $3\% = 3\times\frac{1}{100} = \frac{3}{100}$

$4\% = 4\times\frac{1}{100} = \frac{1}{25}$ $\quad$ $5\% = 5\times\frac{1}{100} = \frac{1}{20}$

$15\% = 15\times\frac{1}{100} = \frac{3}{20}$ $\quad$ $10\% = 10\times\frac{1}{100} = \frac{1}{10}$

$20\% = 20\times\frac{1}{100} = \frac{1}{5}$ $\quad$ $25\% = 25\times\frac{1}{100} = \frac{1}{4}$

$30\% = 30\times\frac{1}{100} = \frac{3}{10}$ $\quad$ $50\% = 50\times\frac{1}{100} = \frac{1}{2}$

$60\% = 60\times\frac{1}{100} = \frac{3}{5}$ $\quad$ $75\% = 75\times\frac{1}{100} = \frac{3}{4}$

$80\% = 80\times\frac{1}{100} = \frac{4}{5}$ $\quad$ $90\% = 90\times\frac{1}{100} = \frac{9}{10}$

$100\% = 100\times\frac{1}{100} = 1$ $\quad$ $200\% = 200\times\frac{1}{100} = 2$

$300\% = 300\times\frac{1}{100} = 3$ $\quad$ $33\frac{1}{3}\% = \frac{100}{3}\times\frac{1}{100} = \frac{1}{3}$

$16\frac{2}{3}\% = \frac{50}{3}\times\frac{1}{100} = \frac{1}{6}$ $\quad$ $14\frac{2}{7}\% = \frac{100}{7}\times\frac{1}{100} = \frac{1}{7}$

$12\frac{1}{2}\% = \frac{25}{2}\times\frac{1}{100} = \frac{1}{8}$ $\quad$ $9\frac{1}{11}\% = \frac{100}{11}\times\frac{1}{100} = \frac{1}{11}$

$11\frac{1}{9}\% = \frac{100}{9}\times\frac{1}{100} = \frac{1}{9}$ $\quad$ $8\frac{1}{3}\% = \frac{25}{3}\times\frac{1}{100} = \frac{1}{12}$

$6\frac{2}{3}\% = \frac{20}{3}\times\frac{1}{100} = \frac{1}{15}$ $\quad$ $5\frac{5}{19}\% = \frac{100}{19}\times\frac{1}{100} = \frac{1}{19}$

भिन्न को प्रतिशत में बदलना
(Change the fraction in to the percentage)

भिन्न को प्रतिशत में बदलने के लिए 100 का गुणा तथा 100 का भाग करते हैं।

To convert a fraction in to a percent multiply by 100 and divide by 100.

$1 = 1\times100\%$ $\quad$ 100% $\quad$ $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\times100\%$ $\quad$ 50%

$\frac{1}{3} = \frac{1}{3}\times100\%$ $\quad$ $33\frac{1}{3}\%$ $\quad$ $\frac{1}{4} = \frac{1}{4}\times100\%$ $\quad$ 25%

$\frac{1}{5} = \frac{1}{5}\times100\%$ $\quad$ 20% $\quad$ $\frac{1}{6} = \frac{1}{6}\times100\%$ $\quad$ $16\frac{2}{3}\%$

$\frac{1}{7} = \frac{1}{7}\times100\%$ $\quad$ $14\frac{2}{7}\%$ $\quad$ $\frac{1}{8} = \frac{1}{8}\times100\%$ $\quad$ $12\frac{1}{2}\%$

$\frac{1}{9} = \frac{1}{9}\times100\%$ $\quad$ $11\frac{1}{9}\%$ $\quad$ $\frac{1}{10} = \frac{1}{10}\times100\%$ $\quad$ 10%

$\frac{1}{11} = \frac{1}{11}\times100\%$ $\quad$ $9\frac{1}{11}\%$ $\quad$ $\frac{1}{12} = \frac{1}{12}\times100\%$ $\quad$ $8\frac{1}{3}\%$

$\frac{1}{13} = \frac{1}{13}\times100\%$ $\quad$ $7\frac{9}{13}\%$ $\quad$ $\frac{1}{14} = \frac{1}{14}\times100\%$ $\quad$ $7\frac{1}{7}\%$

$\frac{1}{15} = \frac{1}{15}\times100\%$ $\quad$ $6\frac{2}{3}\%$ $\quad$ $\frac{1}{16} = \frac{1}{16}\times100\%$ $\quad$ $6\frac{1}{4}\%$

$\frac{1}{17} = \frac{1}{17}\times100\%$ $\quad$ $5\frac{15}{17}\%$ $\quad$ $\frac{1}{18} = \frac{1}{18}\times100\%$ $\quad$ $5\frac{5}{9}\%$

$\frac{1}{19} = \frac{1}{19}\times100\%$ $\quad$ $5\frac{5}{19}\%$ $\quad$ $\frac{1}{20} = \frac{1}{20}\times100\%$ $\quad$ 5%

$\frac{2}{13} = \frac{2}{13}\times100\%$ $\quad$ $15\frac{5}{13}\%$ $\quad$ $\frac{3}{8} = \frac{3}{8}\times100\%$ $\quad$ $37\frac{1}{2}\%$

$\frac{5}{8} = \frac{5}{8}\times100\%$ $\quad$ $62\frac{1}{2}\%$ $\quad$ $\frac{2}{3} = \frac{2}{3}\times100\%$ $\quad$ $66\frac{2}{3}\%$

$\frac{3}{4} = \frac{3}{4}\times100\%$ $\quad$ 75% $\quad$ $\frac{4}{9} = \frac{4}{9}\times100\%$ $\quad$ $44\frac{4}{9}\%$

$\frac{50}{9} \quad 5+\frac{5}{9} \quad 5 \quad 100\% \quad \frac{5}{9} \quad 100\%$

$\Rightarrow 500\% + 55.55\% = 555.55\%$

TeAMSPY

$\frac{83}{12} = 6 + \frac{11}{12}$ 6 100% $\frac{11}{12} \times 100\%$

$600\% + 91.66\% = 691.66\%$

☞ **ध्यान दें (Attention) :**

$20\% = \frac{1}{5}$ ⇒ 5 का 20%, 1 होगा।
का

व्युत्क्रम सूत्र (Reciprocal formula)

$$m = a \times b$$

m ↓ नियत constant, a ↓ +x%, b ↓ ?

$$b \text{ में कमी (decrease in b) } \% = \frac{x}{100+x} \times 100\%$$

$$m = a \times b$$

m ↓ नियत constant, a ↓ –x%, b ↓ ?

$$b \text{ में वृद्धि (increase in b) } \% = \frac{x}{100-x} \times 100\%$$

Example –: राम की आय श्याम की आय से 25% अधिक है तो श्याम की आय, राम की आय से कितने % कम है–

Ram's income is 25% more than shyam's income so what percentage of shyam's income will be less than Ram's income?

Solve : $\text{कमी (Decrease)}\% = \frac{25}{(100+25)} \times 100\%$

$= \frac{25}{125} \times 100\%$ 20%

Example –: राम की आय श्याम की आय से 25% कम है तब श्याम की आय राम की आय से कितने % अधिक होगी।

Ram's income is 25% less than shyam's income then what percentage of shyam's income will be more than Ram's income.

Solve : $\text{वृद्धि (Increase)}\% = \frac{25}{(100-25)} \times 100\%$

$= \frac{25}{75} \times 100\%$ $33\frac{1}{3}\%$

उत्तरोत्तर सूत्र (Successive formula)

$$m = a \times b$$

m ↓ ?, a ↓ ±x%, b ↓ ±y%

$$\pm m = \pm x \pm y \pm \frac{xy}{100}$$

$$m = a \times b \times c$$

m ↓ ?, a ↓ ±x%, b ↓ ±y%, c ↓ ±z%

$$\pm m = \pm x \pm y \pm z \pm \frac{xy \pm yz \pm zx}{100} \pm \frac{xyz}{10000}$$

Example –: किसी वस्तु के मूल्य में 30% की वृद्धि हो जाती है और इसकी खपत में 20% की कमी हो जाती है तो ज्ञात करो वस्तु पर मासिक व्यय में कितने % की कमी अथवा वृद्धि होगी।

The price of an item increases by 30% and the consumption of that is reduced by 20% find how many % of the monthly expenditure on that item will increase or decrease.

Solve –: Expenditure = Price × Consumption
(खर्च) = (मूल्य) × (खपत)
Price ↓ +30%, Consumption ↓ –20%

$\pm m = \pm x \pm y \pm \frac{xy}{100}$

$= 30 - 20 \pm \frac{+30 \times -20}{100}$

$= 30 - 20 - \frac{600}{100}$

$\pm m = +4\%$

⇒ 4% increase

Example –: एक घनाभ की लम्बाई में 50% की वृद्धि, चौड़ाई में 30% की कमी तथा ऊँचाई में भी 20% की कमी कर दी जाती है ज्ञात करो उसके आयतन में कितने % की कमी अथवा वृद्धि होगी?

The length of a cuboid is increase by 50%, the width is reduced by 30% and the height is also reduced by 20%. Find how many % increase or decrease in its volume.

Solve –: $V = l \times b \times h$
l ↓ +50%, b ↓ –30%, h ↓ –20%

$\pm m = \pm x \pm y \pm z \pm \frac{xy \pm yz \pm zx}{100} \pm \frac{xyz}{10,000}$

$\pm m = +50 - 30 - 20 \pm \frac{-1500 + 600 - 1000}{100} + \frac{30000}{10000}$

$\pm m = 0 - \frac{1900}{100} + 3$

$\pm m = -19 + 3$

$\pm m = -16\%$

⇒ 16% decrease

प्रतिशत वितरण (Percentage Distribution)

■ एक व्यक्ति अपनी सम्पत्ति का x% भाग अपनी पत्नी को, शेष का y% भाग अपने पुत्र को तथा शेष का z% भाग अपनी पुत्री को देता है यदि उसके पास कुल सम्पत्ति T हो तो शेष बची सम्पत्ति 'R' होगी–

A person distributes x% of his property to his wife, y% of remaining property to his son and z% of remaining property to his daughter. If he has a total property 'T' the remaining property 'R' will be :

$$R = T \times \frac{(100-x)}{100} \times \frac{(100-y)}{100} \times \frac{(100-z)}{100}$$

TEAM SDV

■ एक व्यक्ति अपनी आय का x% भाग भोजन पर, y% भाग मकान के किराऐ पर और z% अन्य मदों पर खर्च करता है। यदि उसके पास कुल राशि 'T' हो तो शेष राशि 'R' होगी–

A person spends x% of his income on food, y% on house rent and z% on other item. If he has a total amount 'T', then remaining amount 'R' will be :

$$\boxed{R = T \times \frac{100-(x+y+z)}{100}}$$

■ एक व्यक्ति अपनी सम्पत्ति का $\frac{a}{b}$ भाग अपनी पत्नी को, शेष का $\frac{c}{d}$ भाग अपने पुत्र को तथा शेष का $\frac{e}{f}$ भाग अपनी बेटी को देता है यदि उसके पास कुल राशि 'T' ₹ हो, तब शेष बची धनराशि 'R' होगी–

A person distributes $\frac{a}{b}$ part of his property to his wife, $\frac{c}{d}$ part of remaining property to his son and $\frac{e}{f}$ part of remaining property of his daughter. If he has a total property 'T' then the remaining property 'R' will be :

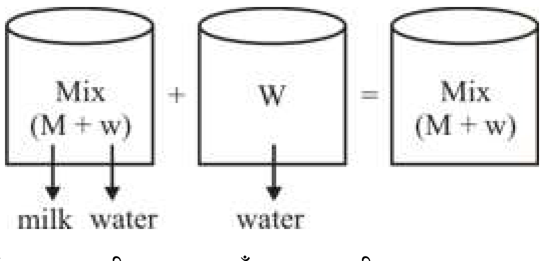
$$\boxed{R = T \times \left(1-\frac{a}{b}\right)\left(1-\frac{c}{d}\right)\left(1-\frac{e}{f}\right)}$$

■ एक व्यक्ति अपनी आय का $\frac{a}{b}$ भाग भोजन पर, $\frac{c}{d}$ भाग मकान के किराऐ पर तथा $\frac{e}{f}$ भाग अन्य मदों पर खर्च करता है यदि उसके पास कुल 'T' ₹ हों, तब शेष बची धनराशि 'R' होगी–

A person spends $\frac{a}{b}$ part of his income on food, $\frac{c}{d}$ part on house rent and $\frac{e}{f}$ part on other items. If has a total amount 'T', then the remaing property 'R' will be:

$$\boxed{R = T \times \left[1-\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\right)\right]}$$

नया मिश्रण तैयार करना (Preparing a new mixture)



बाएँ तरफ दूध की मात्रा = दाएँ तरफ दूध की मात्रा

Quantity of milk in L.H.S = Quantity of milk in R.H.S

OR

बाएँ तरफ पानी की मात्रा = दाएँ तरफ पानी की मात्रा

Quantity of water in L.H.S = Quantity of water in R.H.S

आय (Income)

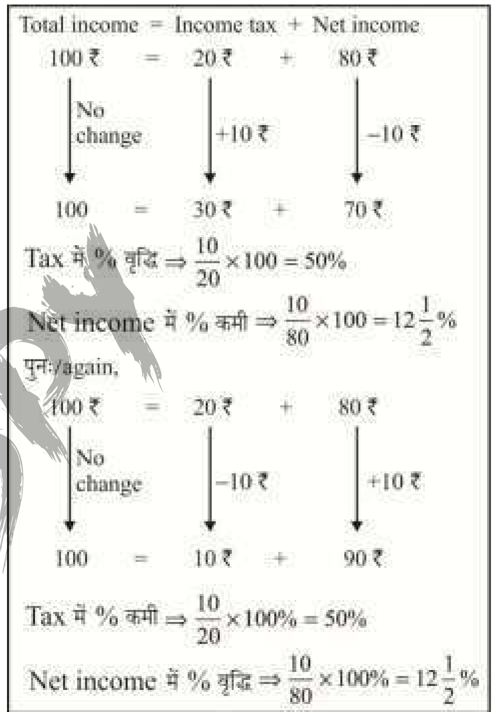
आय = खर्च + बचत

Income = Expenditure + Savings

आयकर (income tax)

कुल आय = आयकर + शुद्ध आय

Total income = Income tax + Net Income



☞ यदि कुल आय नियत है, जितने ₹ कर बढ़ेगा, उतने ₹ ही शुद्ध आय घटेगी तथा जितने ₹ कर घटेगा, उतने ₹ ही शुद्ध आय बढ़ेगी। परन्तु दोनों के होने वाले प्रतिशत बदलाव समान नहीं होंगे।

If the total income is constant (fixed), the more rupees the tax increases, the more net income will decrease. The more rupees the tax decreases, the more the net income will increase. But the percentage changes of both will not be the same.

■ यदि आयकर में x% की वृद्धि होने पर, शुद्ध आय में y% की कमी होती है, तब–

If income tax increase by x%, net income decrease by y%, then :

$$\boxed{\text{Tax } x\% = \text{Net Income} \times y\%}$$

■ यदि आयकर में 19% की वृद्धि होने पर, शुद्ध आय में 6% की कमी होती है। तो आयकर की दर ज्ञात कीजिए।

If there is a decrease of 6% in net income when income tax is incraesed by 19%, then find the rate of income tax.

Sol. $\text{Tax} \times \frac{19}{100} = \text{net income} \times \frac{6}{100}$

$$\frac{\text{tax}}{\text{net income}} = \frac{6}{19}$$

∴ Total income = tax + net income
25 = 6 + 19

Tax rate % = $\frac{6}{25}\times 100\%$

= 24%

प्रारम्भिक और अंतिम मूल्य (Initial and last price)

■ यदि किसी वस्तु के मूल्य में x% की वृद्धि अथवा कमी हो जाने से a ₹ में n वस्तुएँ कम अथवा अधिक आती हो तब–
There is x% increase or decrease in price of any items, n items are more or less in ₹ a, then :

$$\text{प्रारम्भिक मूल्य (Initial Price)} = \frac{a}{n}\times\frac{x}{100\pm x}$$

$$\text{अन्तिम/परिवर्तन के बाद मूल्य (Last/after changing Price)} = \frac{a}{n}\times\frac{100}{x}$$

ताजा फल और सूखा फल (Fresh fruit & dry fruit)

ताजे फल का छिल्का = सूखे फल का छिल्का
The Peel of fresh fruit = the peel of dry fruit

■ ताजे फल में 80% जल है। जबकि सूखे फल में 60% जल है। 100 किग्रा ताजे फल फल में कितना कितना सूखा फल प्राप्त किया जा सकता है?
Fresh fruit has 80% water while dried fruit has 60% water. How much dry fruit can be obtained in 100 kg of fresh fruit?

Sol. ताजा फल × छिलका % = सूखा फल × छिलका %
100 × (100 – 80)% = सूखा फल × (100 – 60)%
100 × 20 = सूखा फल × 40
सूखा फल = 50 kg

परीक्षा में अधिकतम अंक (Maximum marks in examnation)

$$M = 100\times\frac{(a\pm b)\rightarrow \text{अंक}}{(x\pm y)\rightarrow \%}$$

जनसंख्या (Population)

■ यदि किसी कस्बे की जनसंख्या P हो और R% की दर से वृद्धि अथवा कमी हो रही हो।
If the population of a town is P and annual rate is R% Increase or decrease then

t वर्षों बाद जनसंख्या (t years after population)	t वर्ष पहले जनसंख्या (t years before population)
$= P\left(1+\frac{R}{100}\right)^t$	$= \frac{P}{\left(1+\frac{R}{100}\right)^t}$

■ यदि किसी कस्बे की वर्तमान जनसंख्या P है और जनसंख्या क्रमशः पहले, दूसरे और तीसरे वर्ष में R_1%, R_2%, और R_3% की दर से बड़ रही हो या घट रही हो तब तीन वर्ष बाद जनसंख्या –
If the present population of a town is P and the population increase or decrease at the rate of R_1%, R_2% and R_3% respectively then the population of town after 3 year.

$$A = P\ 1\pm\frac{R_1}{100}\quad 1\pm\frac{R_2}{100}\quad 1\pm\frac{R_3}{100}$$

TEAM SDV

03 लाभ और हानि (Profit & Loss)

CP → Cost price लागत मूल्य/क्रय मूल्य
SP → Sell price विक्रय मूल्य
P → Profit लाभ (gain)
L → Loss हानि

जब विक्रय मूल्य क्रय मूल्य से बड़ा हो (when sell price is greater than cost price)

☞ SP > CP
(i) लाभ होगा (will be profit)
(ii) P = SP – CP
(iii) $P\% = \frac{P}{CP}\times 100\%$
(iv) $P\% = \frac{SP-CP}{CP}\times 100\%$

जब विक्रय मूल्य क्रय मूल्य से छोटा हो (When sell price is less than cost price)

☞ SP < CP
(i) हानि होगी (will be loss)
(ii) L = CP – SP
(iii) $L\% = \frac{L}{CP}\times 100\%$
(iv) $L\% = \frac{CP-SP}{CP}\times 100\%$

जब विक्रय मूल्य क्रय मूल्य के बराबर हो
(when sell price is equal to cost price)

☞ $\boxed{SP = CP}$

(i) न लाभ होगा, न हानि (No Profit No Loss)

विक्रय मूल्य और क्रय मूल्य में सम्बन्ध
(Relation between sell price and cost price)

$$\boxed{\frac{CP}{100} = \frac{SP}{100 \pm P/L}}$$

वस्तुओं के सम्बन्ध में लाभ और हानि %
(Profit and loss % in respect of items)

(i) यदि n वस्तुओं को बेचने पर, x वस्तुएँ के क्रय मूल्य के बराबर लाभ होता है तो लाभ प्रतिशत/There is a profit equal to the cost price of x items on selling n items, then profit % is –

$$\boxed{P\% = \frac{x}{n} \times 100\%}$$

(iii) यदि n वस्तुओं को बेचने पर x वस्तुऐं के क्रयमूल्य के बराबर हानि होती है तो हानि % /There is a loss equal to the cost price of x items on selling n items, then loss % is –

$$\boxed{L\% = \frac{x}{n} \times 100\%}$$

(iii) यदि n वस्तुओं को बेचने पर x वस्तुऐ के विक्रय मूल्य के बराबर लाभ होता है तब लाभ प्रतिशत/There is a profit equal to the sell price of x items on selling n items, then profit % is –

$$\boxed{P\% = \frac{x}{(n - x)} \times 100\%}$$

(iv) यदि n वस्तुओं को बेचने पर x वस्तुऐं के विक्रय मूल्य के बराबर हानि होती है तब हानि प्रतिशत/There is a loss equal to the sell price of x items on selling n items, then loss % –

$$\boxed{L\% = \frac{x}{(n + x)} \times 100\%}$$

बेईमान दुकानदार (Dis-honest shopkeeper)

(i) यदि किसी वस्तु को क्रय मूल्य पर ही बेचा जाए परन्तु x gm के स्थान पर y ग्राम तौला जाए तो व्यापार में होने वाला लाभ प्रतिशत/If an item is sold at its cost price but y grams are weighed instead of x grams, then the profit % is-

$$\boxed{P\% = \frac{x - y}{y} \times 100\%}$$

(ii) यदि किसी वस्तु को P% लाभ पर बेचा जाए और 1 kg के स्थान पर y ग्राम तौला जाए तो व्यापार में होने वाला लाभ प्रतिशत/If an item is sold at P% profit and y grams are weight instead of 1 kg, then the profit % is –

$$\boxed{P\% = \frac{10(100 + P) - y}{y} \times 100\%}$$

(iii) यदि एक विक्रेता अपने सामान को लागत मूल्य के x% हानि पर बेचता है लेकिन y ग्राम के बजाए z ग्राम का उपयोग करता है तो उसका लाभ या हानि % –
If a vender used to sell his articles at x% loss on cost price but uses z grams instead of y grams, then his profit or loss % –

$$P/L\% = \left[(100 - x)\frac{z}{y} - 100\right]\%$$

लाभ या हानि धनात्मक या ऋणात्मक संकेत के अनुसार,
Profit or loss as per positive or negative sign.

(iv) $\boxed{P\% = \frac{\text{Error}}{\text{True value} - \text{Error}} \times 100\%}$

क्रमिक लाभ और हानि (Successive profit & Loss) %

$$\boxed{\pm m = \pm x \pm y \pm \frac{xy}{100} \qquad \begin{matrix} \text{लाभ (Profit)} \\ - \rightarrow \text{हानि (Loss)} \end{matrix}}$$

जब विक्रय मूल्य समान हो (When selling price is same)

(i) यदि दो वस्तुओं के विक्रय मूल्य समान है, एक को P% लाभ पर तथा दूसरे को L% की हानि पर बेचा जाता है। तो व्यापार में होने वाला लाभ अथवा हानि % –
If the selling price of two goods is same, one is sold at P% profit and other at L% loss, then the profit or loss % in the business is –:

$$\boxed{P/L\% = \frac{100(P - L) - 2PL}{200 + P - L}\%}$$

(ii) यदि दो वस्तुओं के विक्रयमूल्य समान है, एक को x% लाभ पर और दूसरी को x% हानि पर बेचा जाता है तो हमेशा हानि होती है –
If the selling price of two goods is same, one is sold at x% profit and other at x% loss, then there is always loss–

$$\boxed{L\% = \left(\frac{x}{10}\right)^2}$$

$$\boxed{\text{कुल हानि (Total loss)} = \frac{2SP}{\left(\frac{100}{x}\right)^2 - 1} ₹}$$

जब क्रय मूल्य समान हो (When cost price is same)

(i) यदि दो वस्तुओं के क्रय मूल्य समान हैं, एक को P% लाभ पर तथा दूसरे को L% की हानि पर बेचा जाता है तब व्यापार में लाभ अथवा हानि % –:
If cost price of two goods is same, if one is sold at P% profit and other at L% loss then profit or loss % in the business is–:

$$\boxed{P/L\% = \frac{P - L}{2}\%}$$

(ii) यदि दो वस्तुओं के क्रयमूल्य समान हो, एक को x% लाभ पर तथा दूसरे को x% हानि पर बेचा जाए तो व्यापार में न लाभ होगा न हानि होगी।

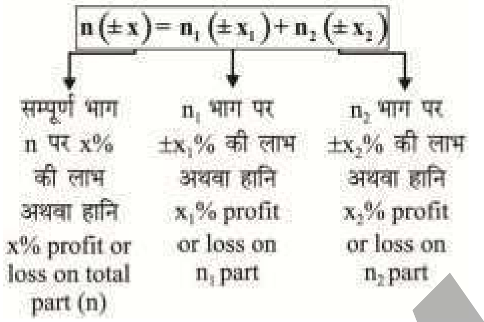
If cost price of two goods is same, if one is sold at x% profit and other at x% loss then there is no profit and no loss in the business –:

(iii) जब एक दुकानदार को Sp_1 ₹ में n_1 वस्तुएँ बेचने पर x% की लाभ अथवा हानि होती है तथा Sp_2 ₹ में n_2 वस्तुऐं बेचने पर y% लाभ अथवा हानि होती है तब –:

When a shopkeeper makes a profit or loss x% on selling n_1 items for Sp_1 ₹ and a profit or loss y% on selling n_2 items for Sp_2 ₹, then –:

$$\frac{Sp_1}{n_1(100\pm x)}=\frac{Sp_2}{n_2(100\pm y)}$$

किसी वस्तु के खण्डों में लाभ और हानि %
(Profite and Loss % in parts of an item)



जब संख्यात्मक मान बराबर हो
(When numerical value is same)

(i) किसी वस्तु को SP ₹ में बेचने पर, लाभ % का संख्यात्मक मान क्रयमूल्य के संख्यात्मक मान के बराबर हो तब क्रयमूल्य –

If the numerical value of profit % by selling an article of ₹ SP is equal to the numerical value of cost price of the article then cost price is –

$$CP=10\sqrt{25+SP}-50$$

(ii) किसी वस्तु को SP ₹ में बेचने पर, हानि % का संख्यात्मक मान क्रयमूल्य के संख्यात्मक मान के बराबर हो तब क्रयमूल्य –

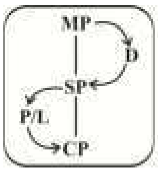
If the numerical value of loss % of by selling an article for ₹ SP is equal to numerical value of cost price of the article then cost price is –

$$CP=10\sqrt{25-SP}+50$$

04 छूट (Discount)

TEAM SPY

MP → बाजार मूल्य/अंकित मूल्य (Marked/Market Price)
D → छूट (Discount/Rebate)
SP → विक्रय मूल्य (Sell Price)
CP → क्रय मूल्य (Cost Price)
P → लाभ (Profit)
L → हानि (Loss)



$D = MP - SP$

$D\% = \frac{D}{MP}\times 100\%$

$D\% = \frac{MP-SP}{MP}\times 100\%$

$SP = MP - D$ तथा $SP = CP \pm P/L$

$\therefore MP - D = CP \pm P/L$

अंकित मूल्य और विक्रय मूल्य में सम्बन्ध
(Relation between MP and SP)

$$\frac{MP}{100}=\frac{SP}{100-D\%}$$

क्रय मूल्य और विक्रय मूल्य में सम्बन्ध
Relation between CP and SP

$$\frac{CP}{100}=\frac{SP}{100\pm P/L\%}$$

अंकित मूल्य और क्रय मूल्य में सम्बन्ध
(Relation between MP and CP)

$$MP\times(100-D\%)=CP\times(100\pm P/L\%)$$

☞ छूट की गणना हमेशा अंकित मूल्य पर की जाती है।
Discount is always calculated on market price.

■ एक व्यापारी अपने माल को क्रय मूल्य से E% अधिक मूल्य अंकित करता है यदि वह अपने ग्राहकों को D% की छूट देता है तो लाभ या हानि % –

A tradesman marks his goods E% above his cost price. If he allows his customers a discount of D% on the market price then the profit or loss % is –

$$\pm P/L = E - D - \frac{ED}{100}$$

उत्तरोत्तर (क्रमिक) x% और y% की समतुल्य छूट %
Net discount % of successive discount of x% and y%

$$\text{समतुल्य छूट (Net discount)\%} = \left(+x + y - \frac{xy}{100}\right)\%$$

उत्तरोत्तर (क्रमिक) x%, y% और z% की समतुल्य छूट %
Net discount % of successive discount of x%, y% & z%

समतुल्य छूट (Net discount) % =
$$(+x + y + z) - \frac{(xy + zy + zx)}{100} + \frac{xyz}{10,000}$$

■ यदि किसी वस्तु का अंकित मूल्य MP ₹ हो उस पर x%, y% और z% की क्रमिक छूट दी जाती है, तब वस्तु का विक्रय मूल्य –
If the marked price of an object MP ₹ and gives the successive discount x%, y% and z%, then the sell price is–

$$SP = MP \times \frac{(100 - x)}{100} \times \frac{(100 - y)}{100} \times \frac{(100 - z)}{100}$$

मुफ्त वस्तुएँ (Free articles)

n वस्तुएं खरीदने पर, वस्तुएं निःशुल्क दी जाती है तब छूट %–
'a' articles are given free on purchasing n articles, then Discount % is –

$$D\% = \frac{a}{a + n} \times 100\%$$

Ex.: (i) 3 वस्तुएँ की खरीद पर, 1 वस्तु मुफ्त तब छूट %
Buy 3 get 1 free, the discount %

$$D\% = \frac{1}{(1+3)} \times 100\%$$

$$D\% = 25\%$$

Ex.: (ii) 10% की छूट और 3 वस्तुएं खरीदने पर 1 वस्तु मुफ्त की समतुल्य छूट %
Net discount % of 10% discount and buy 3 get 1 free

10% Discount + Buy 3 get 1 free
↓ ↓

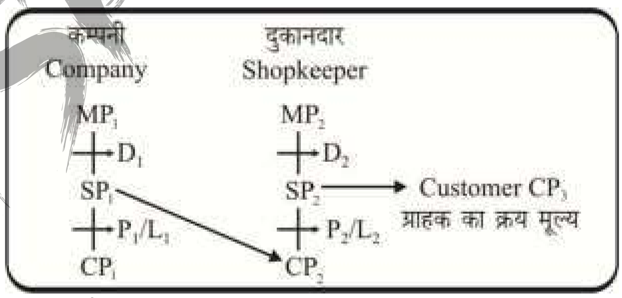
$d_1 = 10\%$ $\quad d_2\% = \frac{1}{(1+3)} \times 100\%$

$d_2 = 25\%$

The successive discount formula –:

$$\text{Net discount} = 10 + 25 - \frac{10 \times 25}{100}$$
$$= 35 - 2.5$$
$$= 32.5\%$$

प्रवाह आरेख (Flow Chart)



☞ कम्पनी का विक्रय मूल्य = दुकानदार का क्रय मूल्य
Sell price of company = cost price of shopkeeper
☞ दुकानदार का विक्रय मूल्य = ग्राहक का क्रय मूल्य
Sell price of shopkeeper = cost price of customer

05 अनुपात-समानुपात (Ratio-Proportion)

अनुपात (Ratio) –: दो एक ही प्रकार की राशियों (मात्राओं) के बीच तुलना या सम्बन्ध को अनुपात कहते है।
Comparision or relation between two amounts (quantities) of same type is called ratio.

☞ अनुपात का कोई मात्रक नही होता है/Ratio has no unit.
☞ अनुपात हमेशा सजातीय राशि (समान इकाइयों) के बीच होता है/ Ratio is always between homogeneous (same) units.

Example :

	I	II	
	5 kg	7 kg	⇒ 5 : 7
	4 hr	5 hr	⇒ 4 : 5
	20₹/kg	30₹/kg	⇒ 2 : 3

☞ अनुपात को भिन्न के रूप में भी लिख सकते हैं।
Ratio can also be written as a fraction.

$a : b \Rightarrow \frac{a}{b}$ — a → अंश (Numerator), b → हर (Denominator)

प्रथम पद (antecedent) — द्वितीय पद (consequent)

मिश्रित अनुपात (Compound Ratio)

$(a : b), (c : d), (e : f) \xrightarrow[\text{(Compound ratio)}]{\text{मिश्रित अनुपात}} (a \times c \times e : b \times d \times f)$

Ex. $(2 : 3), (4 : 5), (7 : 8) \longrightarrow (2 \times 4 \times 7 : 3 \times 5 \times 8) = (7 : 15)$

वर्ग अनुपात (Duplicate Ratio)

$(a : b) \xrightarrow[\text{Duplicate ratio}]{\text{वर्ग अनुपात}} (a^2 : b^2)$

Ex. $(3 : 4) \rightarrow (9 : 16)$

वर्गमूलानुपात (Sub Duplicate Ratio)

$(a : b) \xrightarrow[\text{Sub duplicate ratio}]{\text{वर्ग मूलानुपात}} \sqrt{a} : \sqrt{b} \Rightarrow (a^{1/2} : b^{1/2})$

Ex. $(16 : 25) \rightarrow (4 : 5)$

घनानुपात (Triplicate Ratio)

$(a : b) \xrightarrow[\text{Triplicate ratio}]{\text{घनानुपात}} a^3 : b^3$

Ex. $(3 : 4) \rightarrow (27 : 64)$

घनमूलानुपात (Sub-Triplicate Ratio)

$(a : b) \xrightarrow[\text{Sub triplicate ratio}]{\text{घनमूलानुपात}} \sqrt[3]{a} : \sqrt[3]{b} \Rightarrow (a^{1/3} : b^{1/3})$

Ex. $(64 : 125) \rightarrow (4 : 5)$

समानुपात (Proportion) –: जब दो अनुपातों का मान समान होता है तो दोनों अनुपातों को समानुपात कहा जाता है।

When two ratios have the same value then both ratios are said to be in proportion.

$$(a : b) = (c : d) \Rightarrow (a : b) : : (c : d)$$

प्रतिलोम अनुपात (उल्टा अनुपात) (Inverse ratio or Reciprocal Ratio) –:

$$p : q \rightarrow \left(\frac{1}{p} : \frac{1}{q}\right)$$

अनुक्रमानुपाती (Directly Proportional) –:

$x \propto y$
$x = Ky$

{ जहाँ 'K' एक नियतांक है / where 'K' is constant }

व्युत्क्रमानुपाती (Inversely Proportional) –:

$x \propto \frac{1}{y}$
$x = K\frac{1}{y}$

{ जहाँ K एक नियतांक है। / where K is a constant. }

उल्टा अनुपात (Invertendo) –:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \frac{b}{a} = \frac{d}{c}$$
$$a : b = c : d \Rightarrow b : a = d : c$$

वैकल्पिक अनुपात (Alternendo) –:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$
$$a : b = c : d \Rightarrow a : c = b : d$$

योगन्तरानुपात (Componendo Dividendo)

योगानुपात (Componendo) –:

If $a : b = c : d$

then $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$

अन्तरानुपात (Dividendo) –:

If $a : b = c : d$

then $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$

निष्कर्ष (Conclusion) –:

(i) If $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ then $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$

(ii) If $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c}{d}$ then $\frac{a}{b} = \frac{c+d}{c-d}$

(iii) If $\frac{a}{b} = \frac{c+d}{c-d}$ then $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c}{d}$

अनुपात के कुछ महत्त्वपूर्ण नियम (Some Important rules of ratio)

(i) If $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ then $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$

(ii) If $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ then $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a-c}{b-d} = \frac{c-a}{d-b}$

(iii) If $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ then $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{\sqrt{ac}}{\sqrt{bd}}$

(iv) If $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ then $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \sqrt{\frac{a^2+c^2}{b^2+d^2}}$

(v) If $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ then $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{ka+mc}{kb+md} = \frac{ka-mc}{kb-md}$

(vi) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{a+c+e}{b+d+f} = \frac{a+c-e}{b+d-f} = \frac{\sqrt[3]{ace}}{\sqrt[3]{bdf}}$

$= \sqrt{\frac{a^2+c^2+e^2}{b^2+d^2+f^2}}$

TEAM SPY

समानुपाती कैसे निकाले (How to find Proportion)

स्थिति (Case) 1–: जब तीन राशियाँ a : b : c में दी हों (When three quantities are given in a : b : c)

प्रथमानुपाती (First proportion) –:

$a : b : c \Rightarrow a : b : : b : c$

$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} \quad a = \frac{b^2}{c}$

द्वितीय अनुपाती (Second Proportion) –:

$a : b : c \Rightarrow a : b : : b : c$

$\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$

$b^2 = ac \quad b \quad \sqrt{ac}$

तृतीयानुपाती (Third Proportion) –:

$a : b : c \Rightarrow a : b : : b : c$

$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} \quad c = \frac{b^2}{a}$

स्थिति (Case) 2 –: जब चार राशियाँ a : b : c : d में दी हों (When four quantities are given in a : b : c :d)

प्रथमानुपाती (First Proportion) –:

$a : b : c : d \Rightarrow a : b : : c : d$

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad a = \frac{bc}{d}$

द्वितीयनुपाती (Second Proportion) –:

$a : b : c : d \Rightarrow a : b : : c : d$

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad b = \frac{ad}{c}$

तृतीयानुपाती (Third Proportion) –:

$a : b : c : d \Rightarrow a : b : : c : d$

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad c = \frac{ad}{b}$

Forth Proportion (चतुर्थानुपाती) –:

$a : b : c : d \Rightarrow a : b : : c : d$

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad d = \frac{bc}{a}$

■ यदि राशि A को व्यक्ति P तथा Q में m : n के अनुपात में विपरित की जाऐ तब

If an amount A is the divided between person P and Q in the ratio of m : n then.

P का भाग $(\text{part of P}) = A \times \frac{m}{(m+n)}$

Q का भाग $(\text{part of Q}) = A \times \frac{n}{(m+n)}$

कुछ जोड़ने और घटाने के बाद समानुपात (Proportion after addition and subtraction)

■ यदि x वह संख्या है जिसे a, b, c तथा d में जोड़ने पर वे समानुपाती हो जाते है तो

Let x be a number which is added to a, b, c and d to make then proportional then

$$x = \frac{bc - ad}{(a+d)-(b+c)}$$

■ यदि x वह संख्या है जिसे a, b, c तथा d से घटाने पर समानुपाती हो जाते है।

Let x be a number which in subtracted to a, b, c and d to make then proportional then.

$$\boxed{x = \frac{ad - bc}{(a+d)-(b+c)}}$$

☞ आनुपातिक मान रखते समय प्रत्येक पद की घाते बराबर होना चाहिए। यदि घाते बराबर नहीं हो तो प्रश्न हल नहीं किया जा सकता अर्थात् आँकड़े अपर्याप्त है।

While keeping the proportional value, the degree of each term should be equal. If the power are not equal then the question can not be solved i.e. data are insufficient.

Ex. : यदि a : b = 3 : 2 तब ज्ञात कीजिए–

(i) $\frac{5a + 4b}{5a - 4b}$ (ii) $\frac{5a^2 + 4b^2}{a^2 - ab}$ (iii) $\frac{5a^2 + 4b^2}{a - b}$

(iv) $\frac{5a^2 + 4b^2}{a^3 - b}$

Solution (i) : $\because a : b = 3 : 2$

{ सभी पदों की घात बराबर है (degree of each term is same) }

then, $\frac{5a + 4b}{5a - 4b} = \frac{5 \times 3 + 4 \times 2}{5 \times 3 - 4 \times 2} = \frac{15 + 8}{15 - 8} = \frac{23}{7}$

Solution (ii) : $\because a : b = 3 : 2$

then, $\frac{5a^2 + 4b^2}{a^2 - a.b} = \frac{5 \times 9 + 4 \times 4}{9 - 6} = \frac{45 + 16}{3} = \frac{61}{3}$

Solution (iii) : $\because a : b = 3 : 2$

then, $\frac{5a^2 + 4b^2}{a - b}$ आँकड़े अपर्याप्त (Data insufficient)

$\because$ Degree of each term is not same.

Solution (iii) : $\because a : b = 3 : 2$

then, $\frac{5a^2 + 4b^2}{a^3 - b}$ आँकड़े अपर्याप्त (Data insufficient)

$\because$ Degree of each term is not same.

☞ If a : b = 2 : 3 then $\frac{3a^2 + 2b^2}{4a + 5b} = ?$

अनुपात में जब सभी पदों की घात बराबर न हो।
तब आकड़े अप्रर्याप्त उत्तर होगा।

(ऐसा नही कर सकते) $\frac{3a^2+2b^2}{4a+5b}$

$\because$ a : b = 2 : 3 then $\frac{3(2)^2+2(3)^2}{4\times2+5\times3}$

$=\frac{12+18}{8+15}$

$=\frac{20}{23}$

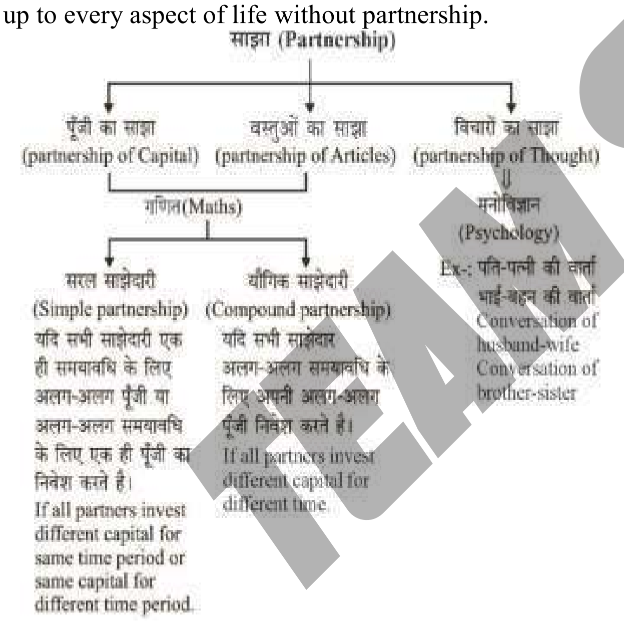
ये उत्तर गलत होगा।

06 साझेदारी (Partnership)

साझेदारी (Partnership)

जीवन निर्वाह के लिए साझेदारी आवश्यक है। बिना साझेदारी के जीवन के प्रत्येक पहलू पर खरे उतरना असम्भव है।

Partnership is necessary for living. It is impossible to live up to every aspect of life without partnership.



लाभो का अनुपात = (पूँजी × समय) का अनुपात

Ratio of profit = Ratio of (Capital × time)

दो साझेदारों के लिए
(For two partners)

$$P_1 : P_2 = C_1t_1 : C_2t_2$$

तीन साझेदारों के लिए
(For three partners)

$$P_1 : P_2 : P_3 = C_1t_1 : C_2t_2 : C_3t_3$$

$$t_1 : t_2 : t_3 = \frac{P_1}{C_1} : \frac{P_2}{C_2} : \frac{P_3}{C_3}$$

$$C_1 : C_2 : C_3 = \frac{P_1}{t_1} : \frac{P_2}{t_2} : \frac{P_3}{t_3}$$

जहाँ/where, P → लाभ (Profit)
C → पूँजी (Capital)
t → समय (Time)

☞ प्रश्न हल करते समय यह ध्यान दें कि कितनी पूँजी, कितने समय के लिए लगी है। जितनी पूँजी, जितने समय के लिए लगी रहती है, उसी पूँजी और समय का गुणनफल करते है।

While solving the question, keep in mind that how much capital is invested and for how long time, multiply the amount of capital invested by time and capital.

☞ यदि प्रश्न में समय न दिया गया हो तो एक वर्ष मानना चाहिए।

If time is not given in the question then it should be considered as one year.

☞ यदि व्यापार में हानि होती हो तो पैसा उसी अनुपात में बाँटता है जिस अनुपात में लाभ के समय बढ़ता है।

If there is a loss in the business then the money is distributed in the same proportion as it is distributed at the time of profit.

TEAM SPY

07 मिश्रण और संलयन (Mixture & Alligation)

मिश्रण और संलयन (Mixture & Alligation)

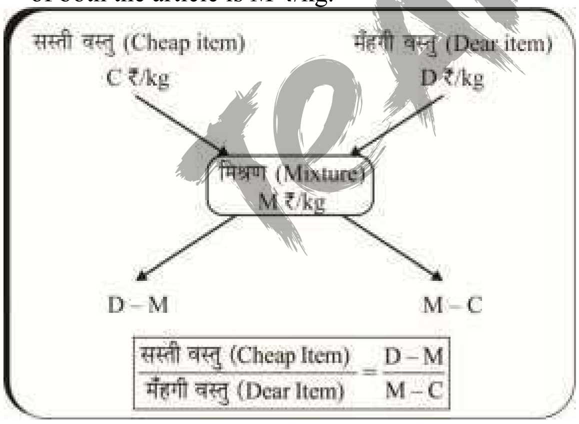
☞ दो या दो से अधिक वस्तुओं को मिलाना मिश्रण कहलाता है।
Mixing of two or more than two things is called mixture.

☞ मिश्रण में दो या दो से अधिक वस्तुओं का निश्चित अनुपात में मिलना संलयन (Alligation) कहलाता है।
Mixing two or more than two things in a mixture in a fixed proportion is called alligation.

☞ संलयन (Alligation) कुछ और नहीं बल्कि एक आनुपातिक माध्य विधि है।
Alligation is nothing but a proportional mean method.

वस्तु की कीमत से मात्रा का अनुपात निकलना (To determine the ratio from price of goods)

☞ यदि सस्ती वस्तु कीमत C ₹/kg है तथा महंगी वस्तु की कीमत D ₹/kg है। दोनों वस्तुऐ के मिश्रण की कीमत M ₹/kg है। तब
If the cost of a cheap item is C ₹/kg and the cost of an dear (expensive) D ₹/kg. The cost of the mixture of both the article is M ₹/kg.

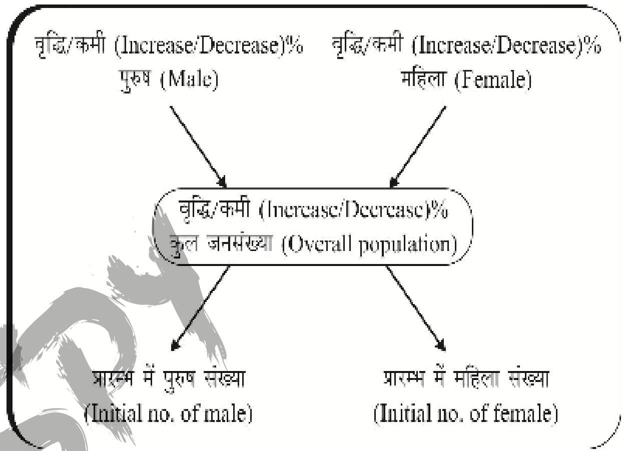


☞ तीनों (सस्ती, मँहगी, मिश्रण) का मात्रक समान होना चाहिए।
All three (cheap items, Dear items and mixture items) must have the same units.

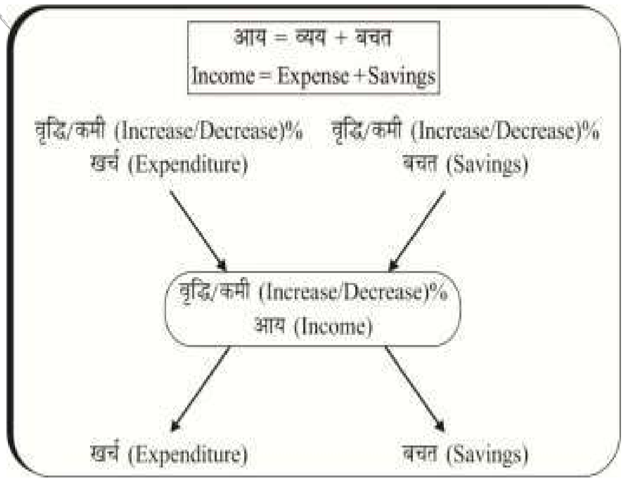
☞ मिश्रण का मान सस्ती और मँहगी के वस्तु के बीच में होना चाहिऐ।
The cost of mixture should be between the cheap and expensive (dear) item cost.

☞ मिश्रण का मान जिसके समबन्ध में निकलता है अनुपात उसी का आता है।
The ratio in relation to which the nature of mixture derived also comes from the same.

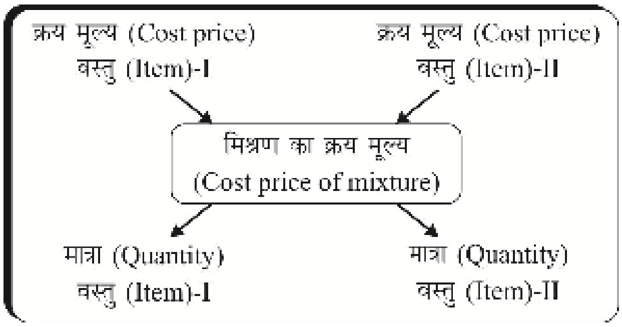
जनसंख्या का मिश्रण (Alligation in population)



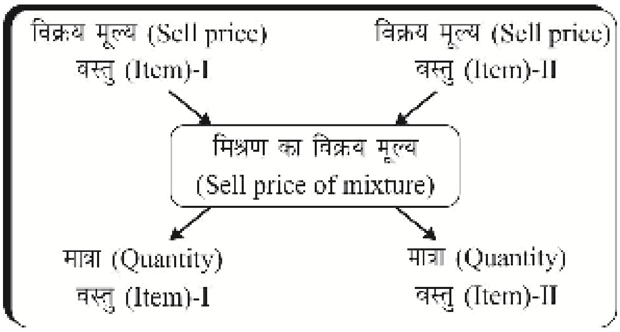
व्यय और बचत में मिश्रण (Alligation in expense and savings)

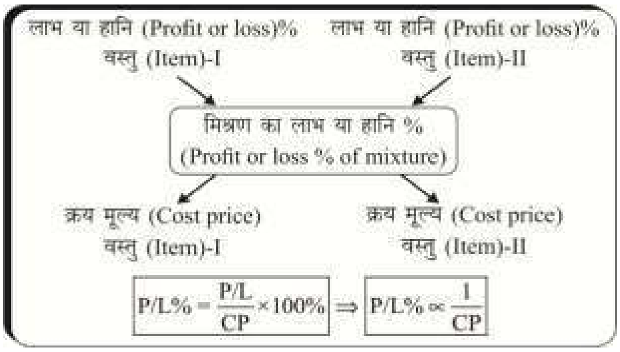


लाभ और हानि में मिश्रण (Alligation in Profit & Loss)

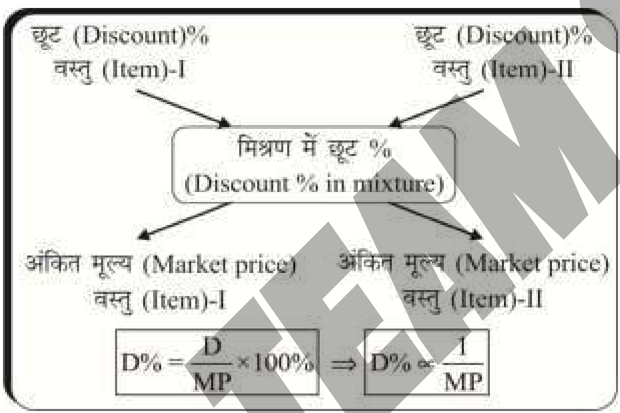


TeAM SPY

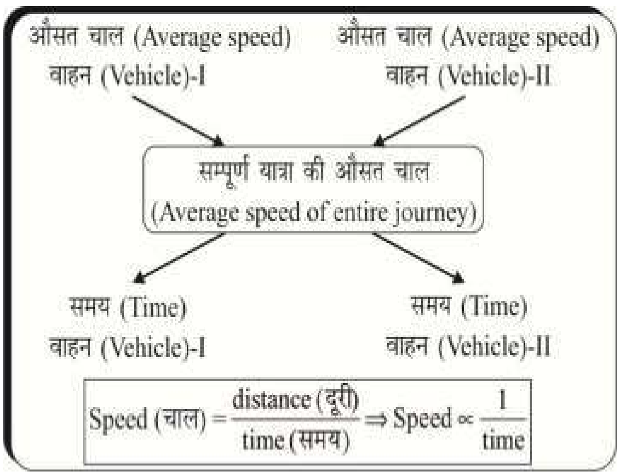




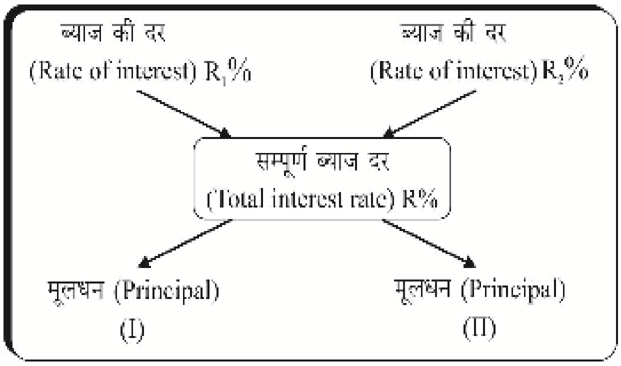
बट्टा में मिश्रण (Alligation in Discount)



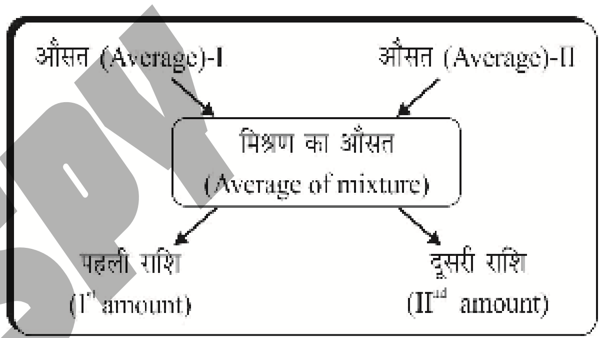
समय, दूरी और चाल में मिश्रण
(Alligation in time, distance and speed)

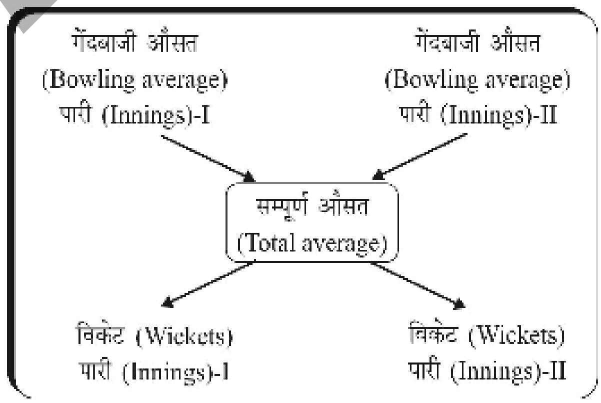


साधारण ब्याज में मिश्रण (Alligation in simple interest)



औसत में मिश्रण (Alligation in average)





TEAM SPY

- T लीटर द्रव में से r लीटर द्रव निकाला जाता है और उतनी ही मात्रा में कोई अन्य द्रव मिला दिया जाता है यदि यह प्रक्रिया n बार की गयी अब शेष बची मात्रा –
  From T litre of liquid r litre is withdrawn and same quantity of other liquid is added if this proven was done n times, the remaining quantity.

$$\text{शेष मात्रा (Remaining Quantity)} = T\left(1-\frac{r}{T}\right)^n$$

- यदि T लीटर द्रव में से r_1 ली. निकाला जाता है और उतनी मात्रा में दूसरी द्रव मिला दिया जाता है। फिर से r_2 लीटर द्रव निकाला जाता है और उतनी ही मात्रा में दूसरा द्रव मिला दिया जाता है पुनः r_3 लीटर द्रव निकाला जाता है और उतनी ही मात्रा में दूसरा द्रव मिला दिया गया तब शेष बची मात्रा

If from T litre of liquied, r_1 litre is withdrawn and same quantity of her liquid is added. Again from mixture, r_2 litre is withdrawn and same quantity of other liquid is added. And again from mixture, r_3 litre is withdrawn and same quantity of the liquid is added then remaining quantity is-

शेष मात्रा (Remaining Quantity) $= T \; 1-\frac{r_1}{T} \quad 1-\frac{r_2}{T} \quad 1-\frac{r_3}{T}$

■ यदि T द्रव की प्रारम्भिक मात्रा है इसमें से r ली. द्रव निकाला गया और उतना ही दूसरा द्रव मिला दिया गया यह प्रक्रिया n बार की गयी यदि प्रारम्भिक द्रव और मिलाये गये द्रव की मात्रा का अनुपात x : y है तब

If T is initial amount of liquid r litre liquid in withdrawn and same amount of other liquid is added this process is as done n times if the ratio of initial liquid and other liquid x : y then

$$\frac{x}{x+y}=\left(1-\frac{r}{x}\right)^n$$

■ एक ग्वाला दूध को क्रयमूल्य पर बेचता है परन्तु इसमें पानी मिलाकर x% लाभ कमाता है तब–

A milkman sells milk at cost price be he adds water to it and earns x% profit then–

1000 ml दूध में मिलायी गयी पानी की मात्रा (Quantity of water added to 1000 ml. milk) = 10 × x ml.

08 समय और कार्य (Time & Work)

■ किसी भी कार्य को करने के लिए समय लगता है या किसी निश्चित समय में कोई कार्य किया जा सकता है।

Any work takes time to do or any work can be done in a certain time.

■ जब कार्य और समय के प्रश्नों को हल किया जाता है तो यह माना जाता है कि एक व्यक्ति एक दिन में जितना कार्य करता है उतना ही वह प्रत्येक दिन करता है।

When questions of work and time are solved, It is assumed that the amount of work a person does in a day is equal to the amount of work he does each day.

■ यदि कोई व्यक्ति किसी कार्य को x दिनों में करे तो उसके एक दिन का कार्य $\frac{1}{x}$ भाग होगा।

If a person does a work in x days then his one day's work will be $\frac{1}{x}$ part.

■ यदि किसी व्यक्ति का एक दिन का कार्य $\frac{1}{x}$ भाग है तो वह पूरा कार्य x दिनों में करेगा।

If the work of a person in one day is $\frac{1}{x}$ part then he will complete it in x days.

■ मजदूरी का बंटवारा कार्य या दक्षता (समता) के आधार पर होता है। समय के आधार पर नही।

Wages are distributed on the basis of work (efficiency) and not on the basis of time.

■ एकांक समय में किया गया कार्य क्षमता कहलाता है।

work done in unit time is called efficiency.

$$\text{कुल कार्य} = \text{क्षमता} \times \text{समय}$$
$$\text{Total work} = \text{efficiency} \times \text{time}$$

■ यदि A किसी कार्य को x दिन में कर सकता है तथा B उसी कार्य को y दिन मे कर सकता है तब A और B दोनों को मिलकर कार्य करने में लगा समय –

If A can do a work in x days and B can do the same work in y days then the time taken by both A and B together to do the work

$$\frac{xy}{x+y}\text{ days}$$

■ यदि A किसी कार्य को x दिन में कर सकता है तथा A और B दोनों मिलकर उस कार्य को y दिन मे कर सकते हैं, तब B को उसी कार्य करने में लगा समय –

If A can do a work in x days and A and B together can do the same work in y days then, the time taken by B to do the work –

$$\frac{xy}{x-y}\text{ days}$$

■ यदि A किसी कार्य को x दिनों में कर सकता है, B उसी कार्य को y दिनों में कर सकता है तथा C उसी कार्य को z दिनों में कर सकता है तो A, B तथा C द्वारा मिलकर कार्य करने में लगा समय –

If A can do a work in x days, B can do the same work in y days and C can do the same work in z days then time taken by A, B and C together to do the work –

$$\frac{xyz}{xy+yz+zx}\text{ days}$$

■ यदि A और B किसी कार्य को x दिनों में कर सकते है, B और C उसी कार्य को y दिनों में कर सकते है तथा C और A उसी कार्य को z दिनों में कर सकते है तब A, B और C द्वारा कार्य को करने में लगा समय –:

If A and B can do a work in x days, B and C can do the same work in y days and C and A can do the same work in z days then time taken by A, B and C together to do the same work

$$\frac{2xyz}{xy+yz+zx}\text{ days}$$

■ A अकेले कार्य करते हुए, A और B दोनों से मिलकर कार्य करने से m दिन अधिक लेता है जबकि B अकेले कार्य करते हुए, A और B दोनों से मिलकर कार्य करने से n दिन अधिक लेता है तब–

A working alone takes m days more both A and B together, B working alone takes n days more both A and B together, then–

A और B दोनों के द्वारा लिया गया समय (Time taken by A and B to do the same work) $= \sqrt{m\times n}$

■ M_1 व्यक्ति W_1 कार्य को प्रतिदिन H_1 घंटे करते हुए D_1 दिनों में समाप्त कर सकते हैं तथा M_2 व्यक्ति W_2 कार्य को प्रतिदिन H_2 घंटे करते हुए D_2 दिनों में समाप्त कर सकते हैं, तब–

If M_1 men can do W_1 work in D_1 days working H_1 hours per day and M_2 men can do W_2 work in D_2 days working H_2 hours per day then–

$$\frac{M_1D_1H_1}{W_1}=\frac{M_2D_2H_2}{W_2}$$

☞ जब दोनों स्थितियों में कार्य बराबर हों

When work is equal in both conditions

$$M_1D_1H_1 = M_2D_2H_2$$

☞ जब दोनों स्थितियों में कार्य के साथ-साथ घण्टों की संख्या बराबर हो

When work is equal in both condition along with working hours.

$$M_1D_1 = M_2D_2$$

दक्षता (क्षमता) और समय में समबन्ध
(Relation between efficiency and time)

$$\text{दक्षता (E)} \propto \frac{1}{\text{समय (t)}}$$

दक्षता (E) × समय (T) = नियतांक (Constant)

$$E_1T_1 = E_2T_2 \qquad E_1T_1 = E_2T_2 = E_3T_3$$

☞ मजदूरी का बँटवारा दक्षता के आधार पर होता है।

Wages are distributed on the basic on efficiency.

☞ यदि A और B किसी कार्य को क्रमशः x, और y दिनों करते है तो उनकी मजदूरी का अनुपात –

If A and B finish the work in x and y days respectively then the ratio of their of wages–

$$\frac{1}{x}:\frac{1}{y} \quad y:x$$

☞ यदि A, B और C किसी कार्य को क्रमशः x, y और z दिनों में करते हो तब उनकी मजदूरी का अनुपात –

If A, B and C finish the work in x, y and z days then the ratio of their wages–

$$\frac{1}{x}:\frac{1}{y}:\frac{1}{z} \quad yz:zx:xy$$

TEAM SPY

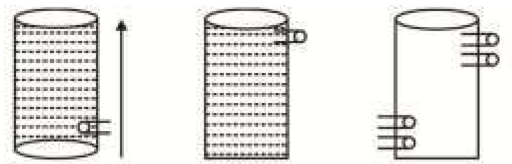
09 पाइप और टंकी (Pipe & Cistern)

■ पाइप और टंकी के सवाल, कार्य और समय की तरह से हल करते है।

Solve pipe and cistern question like work and time.

■ यदि नल भरने वाले हो तो उसके लिए धनात्मक चिह्न का प्रयोग करते है जबकि खाली करने वाले नल के लिए ऋणात्मक चिह्न का प्रयोग करते है।

If the tap is filling, then a positive sign is used. While for the emptying tap, a negative sign is used.

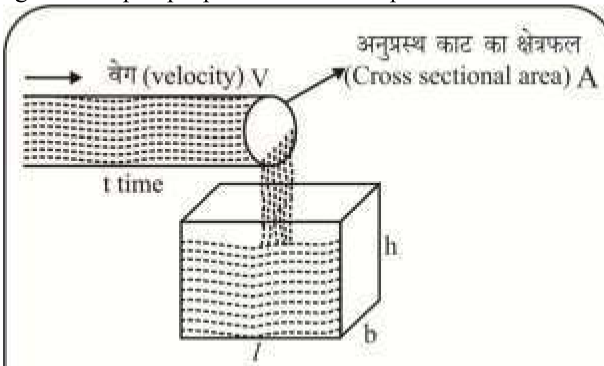


खाली टंकी को पूरा भरना तब To fill empty tank full then work (कार्य) = 1

भरी टंकी को खाली करना तब To empty the full tank then कार्य (work) = 1

प्रारम्भ में टंकी खाली हो कुछ नल भरते है तथा कुछ नल खाली करते ही अंततः टंकी खाली हो जाती है। Initially the tank is empty, some tapes fill it and some tapes empty it eventually the tank becomes empty then कार्य (work) = 0

■ प्रत्येक नल से बहने वाले पानी की मात्रा व्यास के वर्ग के समानुपाती होती है।
The water following through each tap is proportional to the square of diameter.



समय 't' में पाइप से बहने वाला द्रव = टंकी में भरा द्रव
Water flowing from the pipe in time 't' = water in tank.
V× A× t = भरी टंकी का आयतन (the volume of tank)

$$V \times A \times t = l \times b \times h$$

10 साधारण ब्याज (Simple Interest)

$$\text{साधारण ब्याज} = \frac{\text{मूलधन} \times \text{दर} \times \text{समय}}{100}$$

$$\text{Simple interest} = \frac{\text{Principal} \times \text{Rate} \times \text{Time}}{100}$$

$$SI = \frac{P \times R \times t}{100}$$

$$A = P + SI$$

$$A = \left(P + \frac{P \times R \times t}{100}\right)$$

$$A = P\left[1 + \frac{Rt}{100}\right]$$

जहाँ where –
SI = Simple Interest (सा० ब्याज)
P = Principal (मूलधन)
R = Rate (दर)
t = time (समय)
A = Amount (मिश्रधन)

■ किसी धन P पर साधारण ब्याज की दर से पहले t_1 वर्षों के लिए दर R_1%, अलगे t_2 वर्षों के लिए दर R_2% तथा अगले t_3 वर्षों के लिए दर R_3% हो तब कुल ब्याज/The rate of simple interest on any principal P is R_1% rate for the first t_1 years, R_2% rate for the next t_2 years and R_3% rate for the next t_3 years then total simple interest is-

$$SI = SI_1 + SI_2 + SI_3$$

$$SI = \frac{P \times R_1 \times t_1}{100} + \frac{P \times R_2 \times t_2}{100} + \frac{P \times R_3 \times t_3}{100}$$

$$SI = \frac{P}{100}\left[R_1t_1 + R_2t_2 + R_3t_3\right]$$

■ कोई धनराशि साधारण ब्याज की R% दर से, T वर्षों में अपने से n गुना हो जाती है तब/A sum of money becomes n times itself in T years at the rate R% of simple interest, then –

$$RT = (n-1)100\%$$

$$R\% = \frac{(n-1)}{T} \times 100\% \qquad T = \frac{(n-1)}{R} \times 100$$

(i) यदि दर निश्चित हो (If rate is constant)–

"एक निश्चित दर पर, यदि कोई राशि T_1 वर्षों में n_1 गुना होती है तथा T_2 वर्षों में n_2 गुना होती है" तब–
In a certain Rate, if a principal becomes n_1 times in T_1 years and n_2 times in T_2 years, then-

$$\frac{(n_1-1)}{T_1} = \frac{(n_2-1)}{T_2}$$

(ii) यदि समय निश्चित हो (If time is constant)–

एक निश्चित समय में, यदि कोई राशि R_1% दर से n_1 गुना होती है तथा R_2% दर से n_2 गुना होती है, तब–
In a certain time, principal increasing n_1 times at the rate of R_1% and n_2 times at the rate of R_2%, then–

$$\frac{(n_1-1)}{R_1} = \frac{(n_2-1)}{R_2}$$

- यदि किसी धनराशि पर प्राप्त साधारण ब्याज मूलधन का n गुना है तथा ब्याज की दर और समय का संख्यात्मक मान बराबर हो, तब–

  If the simple interest received on a sum of money is n times the principal and the numerical value of rate of interest and time is same, then–

  $$\boxed{\text{दर (Rate)}\% = 10\sqrt{n}\%}$$

  $$\boxed{\text{समय (time)} = 10\sqrt{n}\text{ years}}$$

- यदि मूलधन, दर और समय में से किसी एक को x गुना कर दिया जाए तो प्राप्त होने वाला साधारण ब्याज में वृद्धि अथवा कमी%

  If any one of the principal, rate and time is become x times then increase or decrease % in simple interest received will be –

  $$\boxed{(x-1)\times 100\%}$$

- यदि मूलधन, दर और समय में से किन्हीं दो को क्रमशः x गुना और y गुना कर दिया जाए तो प्राप्त होने वाले साधारण ब्याज में % वृद्धि अथवा कमी–

  If any two of principal, rate and time are become x times and y times then increase or decrease % in simple interest received will be–

  $$\boxed{(xy-1)\times 100\%}$$

- यदि मूलधन, दर और समय को क्रमशः x गुना, y गुना और z गुना कर दिया जाए तो प्राप्त साधारण ब्याज में होने वाली % वृद्धि अथवा कमी–

  If principal, rate and time are become x times, y times and z times respectively then increase or decrease % in simple interest received will be –

  $$\boxed{(xyz-1)\times 100\%}$$

- यदि कोई मूलधन T_1 वर्षों में A_1 ₹ तथा T_2 वर्षों में A_2 ₹ हो जाती है तो वह मूलधन होगा–

  If any principal becomes A_1 in T_1 years and A_2 in T_2 years then the principal will be –

  $$\boxed{P = A_1 - \frac{(A_2-A_1)}{(T_2-T_1)}\times T_1}$$

- यदि किसी मूलधन P को दो भागों जैसे P_1 और P_2 में बाँट कर, R_1% और R_2% की दर से t_1 और t_2 वर्षों के लिए दिया जाता है, तब–

  If a sum 'P' divided in two parts i.e. P_1 and P_2 then each part lent at R_1% and R_2% rates for t_1 and t_2 years respectively.

(i) यदि दोनों भागों से प्राप्त ब्याज बराबर हो (If simple interest received from both parts are equal)–:

$$\boxed{P_1 : P_2 = \frac{1}{R_1t_1} : \frac{1}{R_2t_2}}$$

☞ यदि तीन भाग किये गये हो (If the sum 'P' divided in three parts) –

$$\boxed{P_1 : P_2 : P_3 = \frac{1}{R_1t_1} : \frac{1}{R_2t_2} : \frac{1}{R_3t_3}}$$

(ii) यदि दोनों भागों से प्राप्त मिश्रधन बराबर हो (If amount received from both parts are equal) –:

$$\boxed{P_1 : P_2 = \frac{1}{100+R_1t_1} : \frac{1}{100+R_2t_2}}$$

☞ यदि तीन भाग किए गये हो (If the sum 'P' divided in three parts)–:

$$P_1 : P_2 : P_3 = \frac{1}{100+R_1t_1} : \frac{1}{100+R_2t_2} : \frac{1}{100+R_3t_3}$$

साधारण ब्याज के लिए किस्त
(Installment for simple interest)

$$\boxed{A = \left[I + \left(I + \frac{I\times R\times 1}{100}\right) + \left(I + \frac{I\times R\times 2}{100}\right) \ldots\ldots n\right]}$$

OR

$$\boxed{I = \frac{100A}{100\times n \frac{(n-1)}{2}\times R}}$$

जहाँ where –:

A → मिश्रधन (Amount)

I → किस्त (Installment)

R → दर (Rate)

n → किस्तों की संख्या (No. of Installments)

वर्तमान जमा योजना के तहत किस्ते
(Installments under current deposit scheme)

$$\boxed{SI = \frac{R}{100}\left[nP - \frac{n(n-1)}{2}\times I\right]}$$

OR

$$\boxed{R\% = \frac{100\times SI}{nP - \frac{n(n-1)}{2}\times I}}$$

जहाँ where –:

SI → साधारण ब्याज (simple interest)

P → मूलधन (Principal)

R → दर (Rate)

I → किस्त (Installment)

n → किस्तों की संख्या (No. of Installments)

TEAM SPY

11 चक्रवृद्धि ब्याज (Compound Interest)

■ चक्रवृद्धि ब्याज वह ब्याज है जो मूलधन के साथ-साथ ब्याज पर भी लगता है।
Compound interest is the interest which is charged on the principal as well as the interest.

$$A = P\left(1+\frac{R}{100}\right)^t$$

$\because A = P + CI \Rightarrow CI = A - P$

$$CI = P\left(1+\frac{R}{100}\right)^t - P$$

$$CI = P\left[\left(1+\frac{R}{100}\right)^t - 1\right]$$

जहाँ/where,
P → Principal (मूलधन)
R → Rate (दर)
A → Amount (मिश्रधन)
CI → Compound Interest (चक्रवृद्धि ब्याज)
t → time (समय)

जब अलग-अलग दरों पर ब्याज लग रहा हो
When interest is compounded in different rates

$$A = P\left(1+\frac{R_1}{100}\right)\left(1+\frac{R_2}{100}\right)\ldots\ldots\left(1+\frac{R_n}{100}\right)$$

चक्रवृद्धि ब्याज में प्रभावी/उत्तरोत्तर दर
Effective and successive rate in compound interest

■ **दो वर्ष के लिए (for two years)–:**

$\pm m = \pm x \pm y \pm \frac{xy}{100}\%$ {m → Effective Rate प्रभावी दर}

☞ यदि दोनों वर्षों में समान दर r% हो (If same rate r% in both years)–:

$$m = \left(2r + \frac{r^2}{100}\right)\%$$

■ **तीन वर्ष के लिए (for three years)–:**

$$\pm m = \pm x \pm y \pm z \pm \frac{xy \pm yz \pm zx}{100} \pm \frac{xyz}{10000}$$

☞ यदि तीनों वर्षों में समान दर r% हो (If same rate r% in all three years)–:

$$m = 3r + \frac{3r^2}{100} + \frac{r^3}{10000}$$

चक्रवृद्धि ब्याज में सरलीकरण के लिए सारणी
(Table for direct calculation in CI)

Rate	CI of 2 years	CI of 3 years
5%	10.25%	15.7625%
10%	21%	33.1%
15%	32.25%	52.0875%
20%	44%	72.8%

☞ इन सभी दरों को successive formula से निकाला जा सकता है।/All these rates can be calculated from successive formula.

चक्रवृद्धि ब्याज में अनुपात
(Ratio of compound interest)

2 years = 2 : 1
3 years = 3 : 3 : 1
4 years = 4 : 6 : 4 : 1
5 years = 5 : 10 : 10 : 5 : 1

चक्रवृद्धि ब्याज में ''दरों'' की समझ
(Understanding of Rates in compound interest)

Rate Per Time (दर प्रति समय)	Rate (दर)	Time (समय)
Annually (वार्षिक)	r%	(t) years
Half yearly (अर्धवार्षिक)	$\frac{r}{2}\%$	(t ×2) half years
Quarterly (तिमाही)	$\frac{r}{4}\%$	(t ×4) quater years
Monthly (मासिक)	$\frac{r}{12}\%$	(t ×12) months

■ यदि कोई राशि चक्रवृद्धि ब्याज पर t वर्षों में स्वयं की n गुना हो जाती है तब–:
If a sum becomes n times of itself in t years on compound interest, then–:

$$R\% = \left(n^{\frac{1}{t}} - 1\right) \times 100\%$$

■ चक्रवृद्धि ब्याज पर एक निश्चित राशि, n_1 वर्ष में x गुना और n_2 वर्षों में y गुना हो जाती है तो–:
A certain sum at C.I becomes x times in n_1 years and y times in n_2 years then–:

$$x^{\frac{1}{n_1}} = y^{\frac{1}{n_2}}$$

■ यदि कोई राशि चक्रवृद्धि ब्याज पर t वर्षों में स्वयं का n गुना हो जाती है तो $(t \times x)$ वर्षों में n^x गुना हो जाएगी।

A sum becomes n times of itself in t years on compound interest then n^x time of itself will be $(t \times x)$ years.

t years ⟶ n times
↓ ↓
$t \times x$ years n^x times

Example –: कोई धनराशि चक्रवृद्धि ब्याज की दर से 4 वर्षों में 2 गुना हो जाती है। तो वह कितने वर्षों में 32 गुना हो जाएगी।

If a sum becomes 2 times in 4 years at the rate of compound interest then in how many years it will becomes 32 times.

Solve –:

4 years ⟶ 2 times
↓ ↓
$4 \times (5)$ 32 times
↓ ⇓
20 years 2^5

अतः वह राशि 20 वर्षों में 32 गुना हो जायेगी

(Hence, It will become 32 times in 20 years).

■ यदि कोई धनराशि चक्रवृद्धि ब्याज की दर से t वर्षों में m ₹ और 2t वर्षों में n ₹ हो जाती हो तब–

If a sum becomes m ₹ in t years and n ₹ in 2t years at the rate of compound interest, then–

t years ⟶ m ₹
2t years ⟶ n ₹

$\therefore \boxed{P = \frac{m^2}{n}}$

Example –: कोई धन चक्र वृद्धि ब्याज की दर से 2 वर्ष में 650 ₹ हो जाता है तथा 4 वर्ष में 676 ₹ हो जाता है धन ज्ञात कीजिए।

A sum becomes 650 ₹ in 2 years and 676 ₹ in 4 years at rate of compound interest. Find the sum.

Solve –:

2 years ⟶ 650 ₹
4 years ⟶ 676 ₹

$$P = \frac{650 \times 650}{676} \Rightarrow 625$$

दूसरे और तीसरे वर्ष का ब्याज निकालना
(To calculate interest of II^nd year and III^rd year)

दूसरे वर्ष का ब्याज = दो वर्ष का मिश्रधन – एक वर्ष का मिश्रधन

II^{nd} year's interest $= A_2 - A_1$

तीसरे वर्ष का ब्याज = तीन वर्ष का मिश्रधन – दो वर्ष का मिश्रधन

III^{rd} year's interest $= A_3 - A_2$

जब समय भिन्न के रूप में दिया गया हो
(When time is given as a fraction)

■ P ₹ की राशि को R% वार्षिक चक्रवृद्धि ब्याज की दर से $t\frac{x}{y}$ वर्ष के लिए दिया जाता है, तब समय की समाप्ति के पश्चात् मिश्रधन–

A sum of P ₹ is given for $t\frac{x}{y}$ years at the rate of R% compound interest, in the end of time the amount will be–

$$A = P\left(1+\frac{R}{100}\right)^{t\frac{x}{y}}$$

$$A = P\left(1+\frac{R}{100}\right)^{t}\left(1+\frac{R}{100}\times\frac{x}{y}\right)$$

चक्रवृद्धि ब्याज में किस्त Installment in compound interest

■ **2 वर्षों के लिऐ (for two years)–:**

प्रत्येक किस्त (each installment) $= \frac{P}{\left(1+\frac{R}{100}\right)^1 + \left(1+\frac{R}{100}\right)^2}$

■ **3 वर्षों के लिऐ (for three years)–:**

प्रत्येक किस्त (each installment)

$$= \frac{P}{\left(1+\frac{R}{100}\right)^1 + \left(1+\frac{R}{100}\right)^2 + \left(1+\frac{R}{100}\right)^3}$$

■ **n वर्षों के लिऐ (for n years)–:**

प्रत्येक किस्त (each installment)

$$= \frac{P}{\left(1+\frac{R}{100}\right)^1 + \left(1+\frac{R}{100}\right)^2 + \ldots.. \left(1+\frac{R}{100}\right)^n}$$

चक्रवृद्धि और साधारण ब्याज में अंतर
Difference between simple and compound interest

■ **1 वर्ष के लिए अन्तर (Difference of 1 year)–:** $\boxed{d = 0}$

☞ प्रथम वर्ष का साधारण ब्याज और चक्रवृद्धि ब्याज समान होता है।
Simple interest and compound interest of first year is same.

■ **2 वर्ष के लिए अन्तर (Difference for two years)–:**

$$\boxed{d = \frac{PR^2}{100^2}}$$

■ **3 वर्ष के लिए अन्तर (Difference for three years)–:**

$$\boxed{d = \frac{PR^2(300+R)}{100^3}}$$

■ यदि किसी धनराशि पर 2 वर्ष का साधारण ब्याज x ₹ तथा चक्रवृद्धि ब्याज y ₹ है तो ब्याज की दर–

If the simple interest on a sum of 2 years is x ₹ and compound interest is y ₹ then the rate of interest is–

$$\boxed{R\% = \frac{2(y-x)}{x} \times 100\%}$$

TEAM SPY

12 समय, चाल और दूरी (Time, Speed & Distance)

चाल (Speed) –: एकांक समय में चली गयी दूरी को चाल कहते है। (The distance traveled in unit time is called speed).

$$\text{चाल (speed)} = \frac{\text{दूरी (distance)}}{\text{समय (time)}}$$

$$s = \frac{d}{t}$$

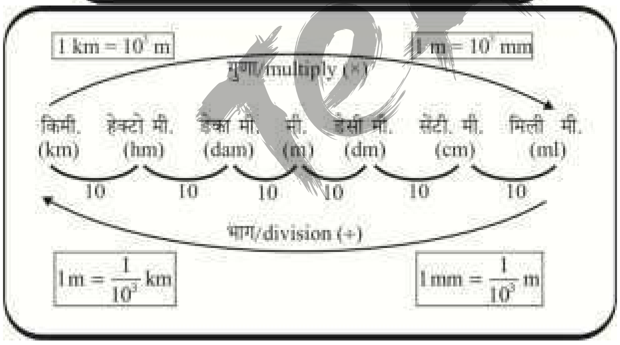
$$d = s \times t \qquad t = \frac{d}{s}$$

मात्रकों का रूपान्तरण (Conversion of units)

$$x\ \text{km/hr} \longrightarrow x \times \frac{5}{18}\ \text{m/sec}$$

$$y\ \text{m/sec} \longrightarrow y \times \frac{18}{5}\ \text{km/hr}$$

☞ 1 hr = 60 min ⇒ 60 × 60 sec ⇒ 3600 sec
☞ 1 km = 1000 m ☞ 1 mile = 1.606 km
☞ 1 yard = 3 ft ☞ 5 mile = 8 km



महत्वपूर्ण स्थितियाँ (Important Cases)–

जब दूरी नियत हो (When distance is constant)

If $d = s_1 t_1$ & $d = s_2 t_2$

$$s_1 t_1 = s_2 t_2$$

$$s \propto \frac{1}{t} \qquad d \rightarrow \text{नियत (constant)}$$

$$s_1 : s_2 = \frac{1}{t_1} : \frac{1}{t_2}$$

If $d = s_1 \times (t \pm t_1)$ & $d = s_2 \times (t \pm t_2)$

then,
$$d = \frac{(s_1 \times s_2)}{(s_1 \pm s_2)} \times (t_1 \pm t_2)$$

{ जहाँ (Where), समय (time) → t_1, t_2 hr में तथा चाल (speed) → km/hr में है। }

☞ यदि समय में योग (कुल) का बोध हो तो चालों का योग करेंगे
If there is a sum of time (total) then these will be sum of speed.

☞ यदि समय में अंतर (पहले बाद में) का बोध हो तो चालों में भी अन्तर करेंगे।
If there is difference in time (before, After) then there will be a difference in speed.

☞ समय के अन्तर को निम्नलिखित तरीकों से समझा जा सकता है
The difference between time can be understood by some following methods –:

समय के सम्बन्ध में (With respect to time) –:

पहले(early), पहले (early) ⟶ घटाव (Subtraction)(–)
देरी (late), देरी (late) ⟶ घटाव (Subtraction)(–)
देरी (late), पहले (early) ⟶ योग (Addition)(+)
पहले(early),देरी(late) ⟶ योग (Addition)(+)

■ एक आदमी कोई निश्चित दूरी तय करता है यदि वह अपनी गति को a km/hr बड़ा दे तो t_1 घंटे कम लगते है यदि वह अपनी गति को b km/hr कम कर दे तो t_2 घंटा अधिक लगते है तब–
A man covered a certain distance. If he increases his speed by a km/hr then it takes t_1 hour less and he decreases his speed b km/hr then it takes t_2 hour more, then–

$$\frac{(S+a)}{a} \times t_1 = \frac{(S-b)}{b} \times t_2$$

Ex.: एक आदमी कोई निश्चित दूरी कार से जाता है यदि वह अपनी गति 6 km/hr बड़ा दे तो उसे 4 hr कम समय लगता है यदि वह अपनी गति 6 km/hr कम कर दे तो उसे 6 hr अधिक समय लगता है। चाल ज्ञात कीजिए?

A man travels a certain distance by a car. If he increase his speed by 6 km/hr then will take 4 hr less but if he decreases his speed 6 km/hr then he will take 6 hr more. Find the speed.

Solve –: $\frac{(S+a)}{a}\times t_1=\frac{(S-b)}{b}\times t_2$

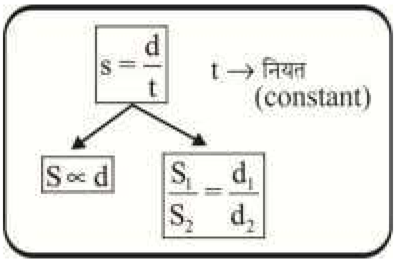
$$\frac{(S+6)}{6}\times 4=\frac{(S-6)}{6}\times 6$$

$4S + 24 = 6S – 36$

$2S = 60$

$S = 30$ km/hr

जब समय निश्चित हो (when the time is constant)



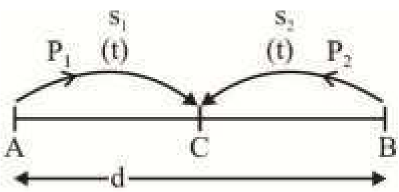
सापेक्षता की अवधारणा (Concept of Relativity)

- **सापेक्षता प्रश्नों को हल करने के लिए समय समान करते हैं (Equalizing time to solve relativity questions).**

☞ विपरीत दिशाओं में चालों को जोड़ते हैं (Add speed in opposite direction)

(i) व्यक्ति P_1 को A से C तक जाने में लगा समय (Time taken by person P_1 to go from A to C) = t

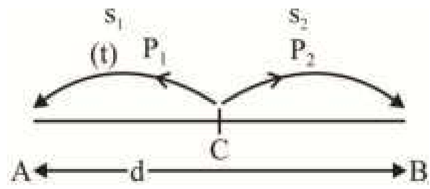
व्यक्ति P_2 को B से C तक जाने में लगा समय (Time taken by person P_2 to go from B to C) = t



$\boxed{s_1+s_2=\frac{d}{t}}$ $\left\{\begin{array}{l} s_1 \to P_1 \text{ व्यक्ति की चाल (Speed of } P_1) \\ s_2 \to P_2 \text{ व्यक्ति की चाल (Speed of } P_2)\end{array}\right\}$

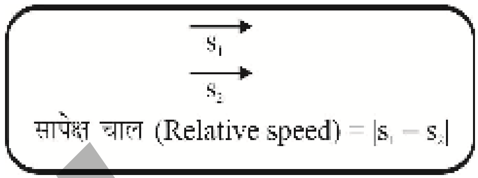
(ii) व्यक्ति P_1 को C से A तक आने में लगा समय (Time taken by person P_1 to come from C to A) = t

व्यक्ति P_2 को C से B तक आने में लगा समय (Time taken by person P_2 to come from C to B) = t



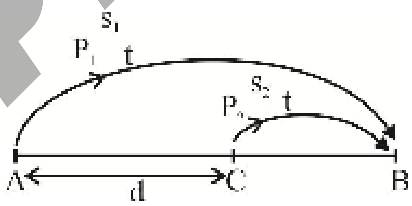
$\therefore$ $\boxed{S_1+S_2=\frac{d}{t}}$

☞ एक ही दिशा में जाने पर चालों को घटाते है (Subtract speed when going in same direction)–



(i) व्यक्ति P_1 को A से B तक जाने में लगा समय (Time taken by person P_1 to go from A to B) = t

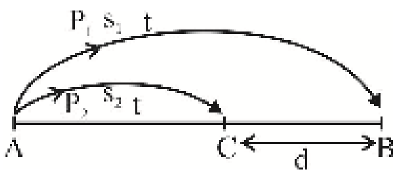
व्यक्ति P_2 को C से B तक जाने में लगा समय (Time taken by person P_2 to go from C to B) = t



$$\boxed{|s_1-s_2|=\frac{d}{t}}$$

(ii) व्यक्ति P_1 को A से B तक जाने में लगा समय (Time taken by person P_1 to go from A to B) = t

व्यक्ति P_2 को A से C तक जाने में लगा समय (Time taken by person P_2 to go from A to C) = t



$$\boxed{|s_1-s_2|=\frac{d}{t}}$$

- यदि बिना रुके किसी ट्रेन से यात्रा करने पर पूरी यात्रा की औसत चाल x km/hr है तथा कई स्थानों पर रुकते हुये जाने पर पूरी यात्रा की औसत चाल y km/hr है तो प्रति घंटे रुकने का समय

Without stoppage, the average speed of a train is x km/hr and with stoppage its average speed is y km/hr. Then the stoppage per hour.

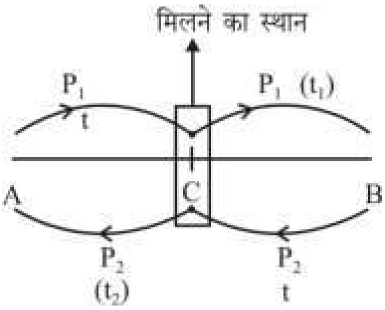
$\boxed{t=\frac{x-y}{x}\times 60\text{min}}$ $\{\text{with } x > y \quad x, y \neq 0\}$

TEAM SPY

मिलने के बाद की विशेष स्थिति
(Special Condition after meeting)

■ यदि दो व्यक्ति P_1 और P_2 एक दूसरे की ओर चलने लगते है। आपस में मिलने के बाद, P_1 अपनी शेष दूरी को t_1 समय में तय करता है और P_2 अपनी शेष दूरी को t_2 समय में तय करता है तब–

If two persons P_1 and P_2 start walking towards each other, after meeting each other, P_1 covers his remaining distance in time t_1 and P_2 covers his remaining distance in time t_2, then–



☞ **उनकी गतियों का अनुपात (Ratio of their speed) –:**

$$\frac{P_1}{P_2}=\sqrt{\frac{t_2}{t_1}}$$

☞ **समय (time) –:**

$$t=\sqrt{t_1\times t_2}$$

☞ **कुल दूरी (Total Distance) –:**

$$\text{दूरी (Distance) } AB = s_1t_1+s_2t_2$$

$$\begin{bmatrix} s_1 \to P_1 \text{ की गति (speed of } P_1) \\ s_2 \to P_2 \text{ की गति (speed of } P_2) \end{bmatrix}$$

औसत चाल (Average speed)

$$\text{औसत चाल (Average speed)}=\frac{\text{कुल दूरी (Total distance)}}{\text{कुल समय (Total time)}}$$

■ यदि एक कार A से B तक x km/hr से जाती है और y km/hr की गति वापिस आती है तब

If a car goes from A to B at x km/hr and returns at y km/hr then –

$$\text{औसत चाल (Average speed)}=\frac{2xy}{x+y}$$

■ यदि कोई व्यक्ति d दूरी x km/hr तथा आगे की d दूरी y km/hr से तय करता है तब–

If a person covers d distance at x km/hr and further d distance at y km/hr then.

$$\text{औसत चाल (Average speed)}=\frac{2xy}{(x+y)}$$

■ यदि कोई व्यक्ति d दूरी x km/hr, आगे की d दूरी y km/hr तथा पुनः आगे की d दूरी z km/hr की गति से तय करता है तब–

If a person covers d distance at x km/hr, and further d distance y km/hr and again d distance at z km/hr then –

$$\text{औसत चाल (Average speed)}=\frac{3xyz}{xy+yz+zx}$$

■ यदि एक व्यक्ति अलग-अलग दूरी d_1, d_2, d_3 .... इसी तरह अलग-अलग समय में क्रमशः t_1, t_2, t_3 समय में तय करता हो तब–

If a man travels different distance d_1, d_2, d_3 .... and so on in different time t_1, t_2, t_3 respectively then–

$$\text{औसत चाल (Average speed)}=\frac{d_1+d_2+d_3.....}{t_1+t_2+t_3.......}$$

■ यदि एक व्यक्ति अलग-अलग दूरी d_1, d_2, d_3 .... और इसी तरह अलग-अलग गति क्रमशः S_1, S_2, S_3 .... से यात्रा करता है तो–

If a man travels different distances d_1, d_2, d_3 .... and so on with different speeds S_1, S_2, S_3 .... respectively then–

$$\text{औसत चाल (Average speed)}=\frac{d_1+d_2+d_3+.....}{\frac{d_1}{S_1}+\frac{d_2}{S_2}+\frac{d_3}{S_3}+.......}$$

■ यदि एक दूरी n को बराबर भागों में विभाजित किया जाता है तथा इस दूरी को क्रमशः S_1, S_2, S_3 .... की चाल से तय किया जाता है तब–

If a distance is divided into n equal parts each travelled with different speeds, S_1, S_2, S_3 .... then–

$$\text{औसत चाल (Average speed)}=\frac{n}{\left(\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\frac{1}{S_3}+......\right)}$$

■ कोई व्यक्ति यात्रा का $\frac{1}{d_1}$ भाग S_1 किमी./घंटा से, $\frac{1}{d_2}$ भाग S_2 किमी./घंटा से तथा $\frac{1}{d_3}$ भाग S_3 किमी./घंटा तय करता हो तब–

If a man covers $\frac{1}{d_1}$ part of journey at S_1 km/hr, $\frac{1}{d_2}$ part of journey at S_2 km/hr and $\frac{1}{d_3}$ part of journey at S_2 km/hr. then–

$$\text{औसत चाल (Average speed)}=\frac{n}{\frac{1}{d_1S_1}+\frac{1}{d_2S_2}+\frac{1}{d_3S_3}}$$

13 रेलगाड़ी (Train)

चाल (Speed) = $\frac{\text{दूरी (Distance)}}{\text{समय (Time)}}$

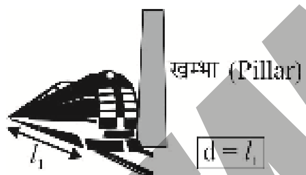
$$S = \frac{d}{t}$$

$$d = S \times t \qquad t = \frac{d}{S}$$

दूरी के सम्बन्ध में (With respect to distance)

■ जब कोई रेलगाड़ी किसी खम्भे या किलोमीटर पत्थर या किसी व्यक्ति को पार करती है तो चली गयी दूरी रेलगाड़ी की लम्बाई के बराबर होती है।

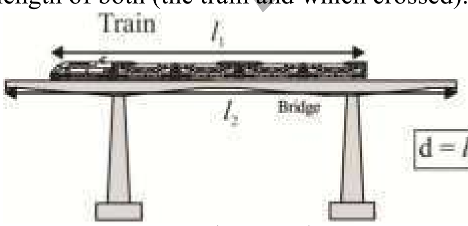
When a train crosses a pole or kilometer stone or a person, the distance covered is equal to the length of the train.



$d = l_1$

■ जब कोई रेलगाड़ी किसी ब्रिज या प्लेटफार्म या सुरंग या दूसरी कोई रेलगाड़ी आदि को पार करती है। तो चली गयी दूरी दोनों (रेलगाड़ी और जिसको पार किया) की लम्बाई के बराबर होती है।

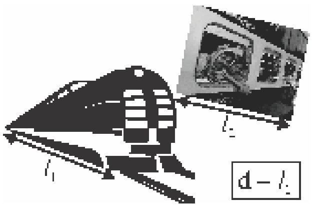
When a train crosses a bridge or platform or tunnel or any other train. So the distance traveled is equal to the length of both (the train and which crossed).



$d = l_1 + l_2$

■ जिस रेलगाड़ी में व्यक्ति बैठा होता है उसकी लम्बाई नहीं लेते।

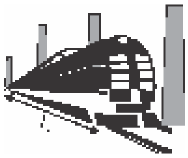
Do not take the length of the train in which the person is sitting.



$d = l_2$

■ यदि कोई यात्री ट्रेन में बैठकर खम्भे गिनता है तब दूरी–

If a passenger counts the poles while sitting in a train, then the distance-



$d = (n - 1)\, x$

जहाँ/where,

$n \rightarrow$ खम्भों की संख्या (numbers of poles)

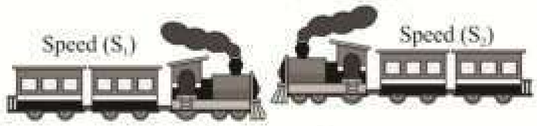
$x \rightarrow$ दो क्रमिक खम्भों के बीच की दूरी (distance between consecutive two poles)

TEAM SPY

चाल के सम्बन्ध में (With respect to speed)

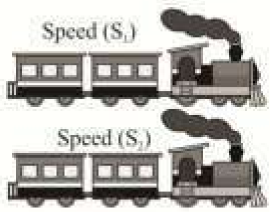
■ **जब दो ट्रेनें एक-दूसरे को पार करती हैं (When two trains cross each other)–**

☞ जब वे विपरीत दिशा में हों (When they are in opposite direction)



$S = S_1 + S_2$

☞ जब वे एक ही दिशा में हों (When they are in same direction)–



$S = |S_1 - S_2|$

मात्रकों का रूपान्तरण (Conversion of units)

☞ x km/hr $\longrightarrow x \times \frac{5}{18}$ m/sec

☞ y m/sec $\longrightarrow y \times \frac{18}{5}$ km/hr

कुछ महत्त्वपूर्ण स्थितियाँ (Some special conditions)

■ जब l_1 लम्बाई की रेलगाड़ी S_1 km/hr की गति से तथा l_2 लम्बाई की रेलगाड़ी S_2 km/hr की गति से एक दूसरे को पार कर रही हो–

When a train of length l_1 at the speed of S_1 km/hr and a train of length l_2 at the speed of S_2 km/hr are crossing each other–

☞ **जब वे विपरीत दिशा में गति कर रही हों (When they move in opposite direction) –:**

$$S_1 + S_2 = \frac{l_1 + l_2}{t}$$

☞ **जब वे एक ही दिशा में गति कर रही हों (When they move in same direction) –:**

$$S_1 - S_2 = \frac{l_1 + l_2}{t}$$

जहाँ/ Where
$t \rightarrow$ एक-दूसरे को पार करने में लगा समय (time taken to cross each other)

■ जब दो समान लम्बाई की रेलगाड़ियाँ, एक व्यक्ति को t_1 और t_2 सेकेण्ड में पार करती हैं, तो दोनों रेलगाड़ियाँ द्वारा एक दूसरे को पार करने में लगा समय –

When two trains of same length cross a man t_1 and t_2 sec then time taken by trains to cross each other –

☞ **यदि वे एक ही दिशा में गतिमान हो (If they move in same direction) –:**

$$t = \frac{2t_1t_2}{|t_1 - t_2|}$$

☞ **यदि वे विपरीत दिशा में गतिमान हो (If they move in opposite direction) –:**

$$t = \frac{2t_1t_2}{t_1 + t_2}$$

■ यदि l मी. लम्बाई की एक ट्रेन l_1 मी. लम्बे प्लेटफार्म को t_1 sec में पार करती है तो उसी ट्रेन द्वारा l_2 मीटर प्लेटफार्म को पार करने में लगा समय –

If a train of length l m crosses a platform of l_1 m in t_1 sec, then the time taken by the same train to cross another platform of length l_2 m is –

$$t = \frac{l + l_2}{l + l_1}\ t_1$$

■ स्टेशनों A और B से, दो ट्रेन क्रमशः S_1 और S_2 गति से एक दूसरे की ओर यात्रा करना शुरू करती है जब वे एक दूसरे से मिलती है तो यह पाया गया कि एक ट्रेन दूसरी ट्रेन की तुलना में d दूरी अधिक तय करती है। स्टेशनों A और B के बीच की दूरी–

From stations A and B, two trains start travelling towards each other at speeds S_1 and S_2 respectively when they meet each other. It was found that one train covers distance d more than that of another train. The distance of stations A and B is –

$$\text{Distance (दूरी)} = \left(\frac{S_1 + S_2}{S_1 - S_2}\right) \times d$$

14 नाव और धारा (Boat & Stream)

कुछ महत्त्वपूर्ण शब्दावली (Some important terminology)

शान्त जल (Still water)–: यदि जल में किसी प्रकार का प्रवाह नहीं है तो इसे शान्त जल कहते हैं। (If there is no flow of any kind in water then it is called still water).

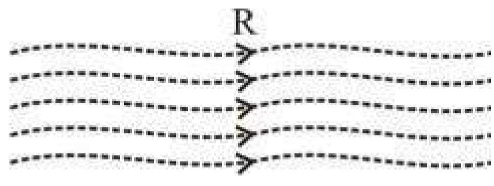
धारा (Stream/Current) –: नदी में बहते हुए जल को धारा कहते है। (The moving water in a river is called a stream).

ऊर्ध्वप्रवाह/प्रतिकूल प्रवाह (Upstream/Against stream)–: यदि नाव धारा के विपरीत दिशा में बह रही है, तो इसे ऊर्ध्वप्रवाह कहा जाता है। (If the boat is flowing in the opposite direction to the stream, it is called upstream).

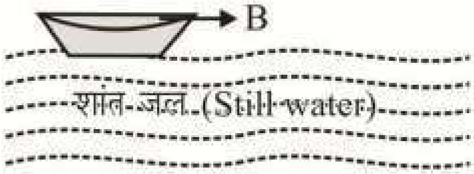
अनुप्रवाह/अनुकूल प्रवाह (Down stream/with stream)–: यदि नाव धारा की दिशा में बह रही है तो अनुप्रवाह कहा जाता है। (If the boat is flowing along the direction of the stream, it is called downstream).

चाल के सम्बन्ध में (With respect to speed)

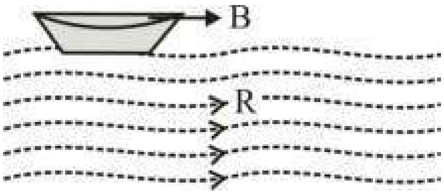
☞ **धारा की चाल (Speed of stream/current) = R**



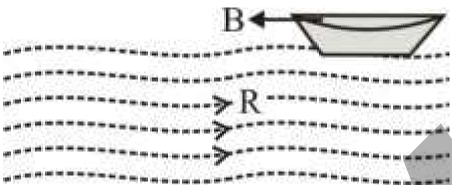
☞ **शांत जल में नाव की चाल (The speed of boat in still water) = B**



☞ **धारा के अनुकूल चाल/धारा के साथ-साथ/अनुप्रवाह में चाल (with the stream)/(down stream) ⇒ (B + R)**



☞ **धारा के प्रतिकूल चाल/धारा के विपरीत चाल/ऊर्ध्व प्रवाह में चाल (Up stream/Against the stream)⇒ B – R**



जब (B + R) तथा (B – R) दिया गया हो
[When (B + R) and (B – R) given]

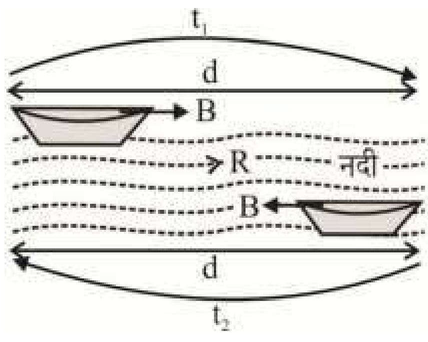
■ यदि/If, B + R = m और/and B – R = n

☞ **शांत जल में नाव की चाल (Speed of boat in still water) =** $\frac{1}{2}(m+n)$

☞ **धारा की चाल (Speed of stream) =** $\frac{1}{2}(m-n)$

■ यदि एक नाव (d) दूरी धारा के अनुकूल तथा उतनी ही दूरी धारा के प्रतिकूल t घंटे में तय करती है तब–

If a boat covers distance 'd' down stream and same distance up stream in t hours then–



$t = t_1 + t_2$

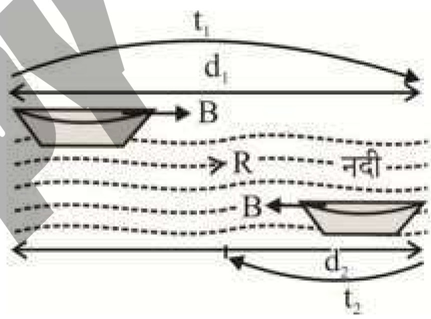
$$t = \frac{d}{B+R} + \frac{d}{B-R} \quad \frac{2B}{(B^2-R^2)} \; d$$

$$d = \frac{(B^2-R^2)}{2B} \times t$$

☞ **औसत चाल (Average speed) =** $\frac{B^2 - R^2}{2B}$

■ एक नाव 'd_1' दूरी धारा के अनुकूल तथा 'd_2' दूरी धारा के प्रतिकूल 't' घंटे में तय करती है, तब–

If a boat covers 'd_1' distance in down stream and 'd_2' distance in up stream in 't' hours then–



$t = t_1 + t_2$

$$t = \frac{d_1}{B+R} + \frac{d_2}{B-R}$$

■ यदि नाव धारा के अनुकूल 'd_1' किमी. और धारा के प्रतिकूल 'd_2' किमी. की यात्रा करने में समान समय लेती है, तब–

If a boat take same time to travel 'd_1' km down stream and 'd_2' km upstream then–

$$\frac{\text{नाव की चाल (speed of boat)}}{\text{धारा की चाल (speed of stream)}} = \frac{d_1 + d_2}{d_1 - d_2}$$

■ यदि एक नाव धारा की दिशा में 't_1' घंटे में कोई दूरी तय करती है जबकि धारा की विपरीत दिशा में वही दूरी 't_2' घंटे में तय करती है तब

If a boat covers a distance in down stream in 't_1' hours while the same distance is covered upstream in 't_2' hours then –:

$$\frac{\text{नाव की चाल (speed of boat)}}{\text{धारा की चाल (speed of stream)}} = \frac{t_1 + t_2}{t_1 - t_2}$$

TEAM SPY

15 दौड़ (Race)

$$\text{चाल (speed)} = \frac{\text{दूरी (distance)}}{\text{समय (time)}} \qquad s = \frac{d}{t}$$

मात्रकों का रूपान्तरण (Conversion of units)

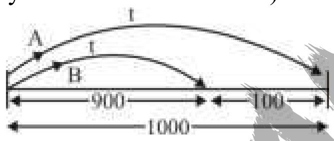
$$x\ \text{km/hr} \longrightarrow x \times \frac{5}{18}\ \text{m/sec}$$
$$y\ \text{m/sec} \longrightarrow y \times \frac{18}{5}\ \text{km/hr}$$

जब समय निश्चित हो (When time is constant)

$$s = \frac{d}{t} \Rightarrow s \propto d$$

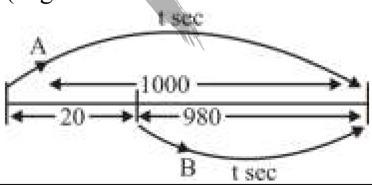
{जहाँ/Where, $t \rightarrow$ नियत (constant)}

■ 1000 मी. की दौड़ में A, B को 100 मी. से हराता है (A beats B by 100 m in 1000 m Race)–



A	:	B	
d ⇒ 1000		900	
s ⇒ 1000		900	⇒ 10 : 9

■ 1000 मी. की दौड़ में, A, B को 20 मी. का स्टार्ट (बड़त) देता है। (A gives 20 m start to B in 1000 m Race).



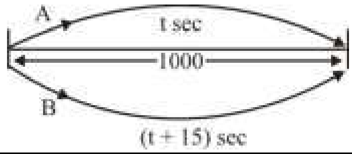
A	:	B	
d ⇒ 1000		980	
s ⇒ 1000		980	⇒ 50 : 49

जब दूरी निश्चित हो (When distance is constant)

$$s = \frac{d}{t} \Rightarrow s \propto \frac{1}{t}$$

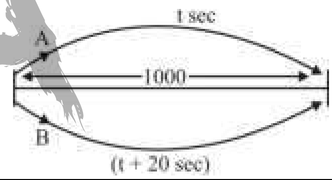
{जहाँ/Where, $d \rightarrow$ नियत (constant)}

■ 1000 मी. की दौड़ से A, B को 15 sec से हराता है। (A beats B by 15 sec in 1000 m Race).



	A	:	B
time ⇒	t	:	(t + 15)
speed ⇒	(t + 15)	:	t

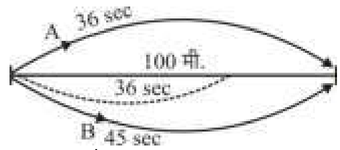
■ 1000 मी. की दौड़ में A, B को 20 sec का स्टार्ट देता है (A gives 20 sec start to B in 1000 m Race) –:



	A	:	B
time ⇒	t	:	(t + 20)
speed ⇒	(t + 20)	:	t

Ex. 100 मी. दौड़ में, A इस दूरी को 36 sec में तथा B इस दूरी को 45 sec में तय करता है। इस दौड़ में A, B को कितने मीटर से हराता है।/In a 100 meter race, A covers this distance in 36 seconds and B in 45 seconds. By how many meters will A beat B in this race?

Solve –:



$\because$ B, 45 sec में जाता है = 100 मी.

$\therefore$ 36 sec में $\rightarrow \frac{100}{45} \times 36 \quad 80\text{m}$

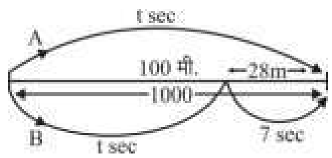
अतः A, B को 100 – 80 = 20 मीटर से हराएगा। **OR**

$\because$ B, 45 sec में जाता है = 100 मी.

$\therefore$ 9sec $\rightarrow \frac{100}{45} \times 9 \Rightarrow 20$ मी.

Ex. 1 किमी. की दौड़ में A, B को 28 मीटर अथवा 7 सेकेण्ड से हरा देता है। इस दौड़ को पूरा करने में A कितना समय लेगा? In a 1 kilometer race, A beats B by 28 meters or 7 seconds. How long will A take to complete the race?

Solve –:



∵ B, 28 मी. दौड़ता → 7 sec में

∴ B को 1,000 मी. दौड़ने में लगा समय $= \frac{7}{28} \times 1000$

$= 250$ sec

1 किमी. दौड़ने में A द्वारा लिया गया समय $= 250 - 7$

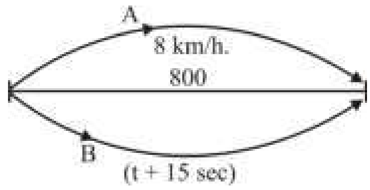
$= 243$ sec

$= 4$ min 3 sec

Ex. 800 मी. की दौड़ में A ने B को 15 सेकेण्ड से परास्त किया। यदि A की चाल 8 किमी./घण्टा हो, तो B की चाल कितनी है?

In a race of 800 meters, A defected B by 15 secs. If the speed of A 8 km/hr, what will be the speed of B?

Solve :–



A को 800 मीटर दूरी तय करने में लगा समय $(t) = \frac{800}{8 \times 5/18}$

$= \frac{800 \times 18}{40}$

$= 360$ sec.

∴B को 800 मी .दूरी तय करने में लगा समय $= (360 + 15)$ sec

$= 375$ sec

B की चाल $= \frac{800}{375} = \frac{32}{15}$ मी./sec

$= \frac{32}{15} \times \frac{18}{5}$ km/hr   7.68 km/hr

Ex. 1 किमी. की दौड़ में A, B का 100 मीटर से हराता है। 300 मी. की दौड़ में B, C को 50 मी. से हराता है तो 1 किमी. की दौड़ में A, C को कितने मीटर से हरायेगा?

In a race of 1 km, A beats B by 100 m. In a race of 300 m, B beats C by 50 m. Then in a race of 1 km by what margin will A beat C ?

Solve :–

A : B   B : C

1000 : (1000 – 100)   300 : (300 – 50)

1000 : 900   6 : 5

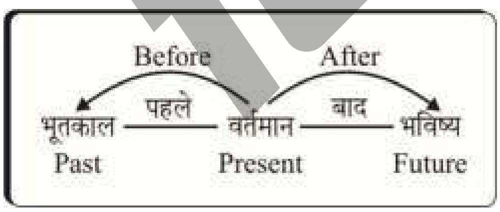
10 : 9

A : B : C = 20 : 18 : 15

↓ 1000   ↓ $\frac{1000}{20} \times 15 \Rightarrow 750$ m

अतः A, C को 250 m से हराएगा। (Hence, A will beat C, 250 m.)

16 आयु (Age)



■ यदि P और Q की वर्तमान आयु क्रमशः x तथा y हो (If present age of P and Q is x and y respectively).

☞ **t वर्ष बाद P और Q की आयु (After t year, Age of P and Q) =** $\boxed{\frac{x+t}{y+t}}$

☞ **t वर्ष पहले P और Q की आयु (t years Ago, Age of P and Q) =** $\boxed{\frac{x-t}{y-t}}$

☞ जन्म के समय दो व्यक्तियों की आयु में जितना अन्तर होगा वह अन्तर मृत्यु तक समान रहेगा।

The difference in age of two persons at the time of birth will remain the same till death.

Ex. –: यदि A और B की आयु 2020 में क्रमशः 10 वर्ष और 8 वर्ष हो। तब A और B की आयु 2030 में क्रमशः 20 वर्ष और 18 वर्ष होगीः

If the ages of A and B are 10 years and 8 years respectively in 2020. Then A and B will be 20 years and 18 years respectively in 2030

वर्ष/Year	**A**	**B**	**अन्तर/ Difference**
2020	10	8	2
2030	20	18	2

अतः अन्तर समान रहेगा।

Hence, the difference will remain the same.

☞ विद्यार्थी अन्तर समान देखकर प्रश्नों को जल्दी हल कर सकते है।

Students can solve questions quickly by seeing difference.

TEAM SPY

17 औसत (Average)

$$\text{Average (औसत)} = \frac{\text{Sum of all items (राशियों का योग)}}{\text{Number of itmes (राशियों की संख्या)}}$$

OR

$$\text{Average (औसत)} = \frac{\text{Sum of observations (प्रेक्षणों का योग)}}{\text{Number of observations (प्रेक्षणों की संख्या)}}$$

$$\boxed{A = \frac{Sn}{n}} \qquad \boxed{Sn = A \times n} \qquad \boxed{n = \frac{Sn}{A}}$$

जहाँ/Where, A → औसत (Average)
Sn → संख्याओं का योग (Sum of items)
n → संख्याओं की संख्या (No. of items)

क्रमागत संख्याओं के लिए (For consecutive numbers)

क्रमागत संख्याओं का औसत (Average of consecutive numbers)

- माध्यिका का प्रयोग करके (Using of median)
  - यदि n का मान कोई विषम संख्या हो (If the value of n is an odd number)

    माध्यिका (Median) = $\left(\frac{n+1}{2}\right)^{th}$ term
  - यदि n का मान कोई सम संख्या हो (If the value of n is an even number)

    माध्यिका (Median) = $\frac{1}{2}\left[\left(\frac{n}{2}\right)^{th} \text{term} + \left(\frac{n}{2}+1\right)^{th} \text{term}\right]$
- $\frac{\text{प्रथम पद + अंतिम पद (First term + Last term)}}{2}$
- सूत्रों का प्रयोग करके (Using formulas)

सूत्रों का प्रयोग करके (Using formulas)

प्राकृतिक संख्याओं के लिए (For natural numbers)

■ प्रथम n प्राकृतिक संख्याओं का औसत (Average of first n natural numbers)–

$$\because Sn = \frac{n(n+1)}{2} \Rightarrow \boxed{A = \frac{(n+1)}{2}}$$

■ प्रथम n प्राकृतिक संख्याओं के वर्गों का औसत (Average of square of first n natural numbers)–

$$\because Sn = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \Rightarrow \boxed{A = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}}$$

■ प्रथम n प्राकृतिक संख्याओं के घनों का औसत (Average of cube of first n natural numbers)–

$$\because Sn = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 \Rightarrow \boxed{A = \frac{n(n+1)^2}{4}}$$

क्रमागत सम संख्याओं के लिए (For consecutive even numbers)

■ प्रथम n क्रमागत सम संख्याओं का औसत (Average of first n even numbers)–

$$\because Sn = n(n+1) \Rightarrow \boxed{A = (n+1)}$$

■ प्रथम n सम संख्याओं के वर्गों का औसत (Average of square of first n even numbers)–

$$\because Sn = \frac{2n(n+1)(2n+1)}{3} \Rightarrow \boxed{A = \frac{2(n+1)(2n+1)}{3}}$$

■ प्रथम n सम संख्याओं के घनों का औसत (Average of cube of first n even numbers)–

$$\because Sn = 2n^2(n+1)^2 \Rightarrow \boxed{A = 2n(n+1)^2}$$

क्रमागत विषम संख्याओं के लिए (For consecutive odd numbers)

■ प्रथम n विषम संख्याओं का औसत (Average of first n odd number)–

$$\because Sn = n^2 \Rightarrow \boxed{A = n}$$

■ प्रथम n विषम संख्याओं के वर्गों का औसत (Average of square of first n odd number)–

$$\because Sn = \frac{n(2n+1)(2n-1)}{3} \Rightarrow \boxed{A = \frac{(2n+1)(2n-1)}{3}}$$

■ प्रथम n विषम संख्याओं के घनों का औसत (Average of cube of first n odd number)–

$$\because Sn = n^2(2n^2-1) \Rightarrow \boxed{A = n(2n^2-1)}$$

■ यदि कुछ संख्याओं का औसत x है और प्रत्येक संख्या में n जोड़ दिया जाए अथवा घटा दिया जाए तब औसत-

If Average of some numbers is x and n is added or subtracted to each number then the average is–

$$A = x \pm n$$

■ यदि कुछ संख्याओं का औसत x है तथा प्रत्येक संख्या में m से गुणा किया जाए तो औसत-

If average of some numbers is x and each number is multiplied by m the average is.

$$A = x \times m$$

■ यदि कुछ संख्याओं का औसत x है तथा प्रत्येक संख्या में m से भाग दिया जाए तब औसत-

If average of sum numbers is x and each number dividen by m, then average–

$$A = \frac{x}{m}$$

■ यदि किसी श्रेणी जिसका सर्वान्तर d तथा औसत k हो और इसमें आगे अथवा पीछे से x संख्याऐ जोड़े तो नया औसत-

If in any series having common difference 'd' and average 'k', x numbers are added in forward or backward then the new average–

$$\text{नया औसत (new average)} = K \pm \frac{xd}{2}$$

■ सम अथवा विषम संख्याओं की श्रेणी जिसका औसत k है, उसमें यदि हम आगे से अथवा पीछे से x संख्याऐ जोड़े तब–

In series of even or add number having average 'k', if we add x number in forward or backward, then–

$$\text{नया औसत (New average)} = k \pm x$$

■ k औसत वाली प्राकृतिक संख्याओं की किसी श्रेणी में यदि आगे से अथवा पीछे से x संख्याऐं जोड़ी जाए तो-

In series of natural number having average 'k', if we add 'x' number in forward or backward then

$$\text{नया औसत (new average)} = K \pm \frac{x}{2}$$

■ यदि तीन प्राकृतिक संख्याऐं हो और किसी दो संख्याओं के औसत को, किसी तीसरी संख्या में जोड़ा तो प्राप्त संख्याऐ क्रमशः a, b तथा c हो तब-

If there are three natural numbers and average of any two number, if added with third number gives a, b and c. Then natural numbers.

माना संख्याओं का योग (Let sum of numbers) = k

तब/then, $k = \frac{a+b+c}{2}$

प्रथम संख्या (first number) = (2a – k)

द्वितीय संख्या (second number) = (2b – k)

तृतीय संख्या (third number) = (2c – k)

■ यदि n प्रेक्षणों का औसत a है परन्तु यदि एक प्रेक्षण को विस्थापित कर दिया जाए तो औसत b हो जाता है विस्थापित प्रेक्षण का मान-

If average of n observations is 'a' but the average becomes b when one observation is eliminated then value of eliminated observation.

$$\Rightarrow n(a-b)+b$$

■ यदि n प्रेक्षणों का औसत a है परन्तु यदि एक प्रेक्षण को शामिल कर दिया जाए तो औसत b हो जाता है, तब शामिल किए गये प्रेक्षण का मान–

If average of n observations is 'a' but the average becomes 'b' when one observation is added, then value of added observation

$$\Rightarrow n(b-a)+b$$

■ यदि किसी कक्षा में 'n' विद्यार्थियों का औसत 'a' है, जहाँ उत्तीर्ण विद्यार्थियों का औसत 'x' और अनुत्तीर्ण विद्यार्थियों का औसत 'y' है, तब–

If the average of 'n' students in a class is 'a', where average of passed students is 'x' and average of failed students is 'y', then–

$$\text{No. of passed students (उत्तीर्ण विद्यार्थियों की संख्या)} = \frac{n(a-y)}{(x-y)}$$

■ यदि n संख्याओं का औसत a है लेकिन बाद में यह पाया गया कि एक संख्या x को गलती से y पढ़ लिया गया था तब

If average of n numbers is 'a' but later on it was found that a number 'x' was misread as 'y'. Then

$$\text{सही औसत (Correct average)} = a + \frac{(x-y)}{n}$$

■ यदि n संख्याओं का औसत a है लेकिन बाद में यह पाया गया कि दो संख्याऐ x और y को गलती से p और q पढ़ लिया गया तब –

If the average of n number is 'a' but later on it was found that two numbers x and y misread as p and q, then

$$\text{सही औसत (Correct average)} = a + \frac{x+y-p-q}{n}$$

बल्लेबाज और गेंदबाद का औसत
(Average of batsman and bowler)

$$\text{बल्लेबाज का औसत} = \frac{\text{बनाए गये रन}}{\text{कुल खेली पारी} - \text{नाबाद पारी}}$$

$$\text{Average of batsman} = \frac{\text{Total runs scored}}{\text{Total number of innings} - \text{Not out innings}}$$

$$\text{गेंदबाज का औसत} = \frac{\text{दिऐ गये कुल रन}}{\text{लिऐ गये कुल विकेट}}$$

$$\text{Average of Bowler} = \frac{\text{Given total runs}}{\text{Taken total wickets}}$$

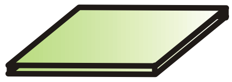
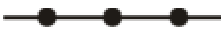
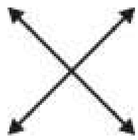
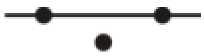
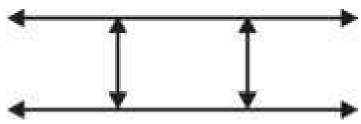
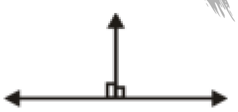
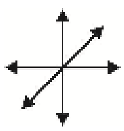
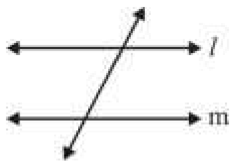
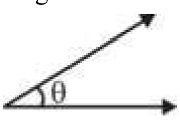
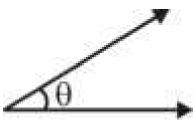
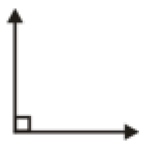
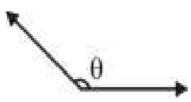
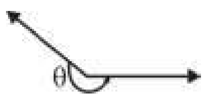
TEAM SPY

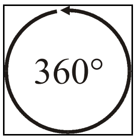
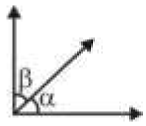
18 ज्यामिति (Geometry)

Geometry = Geo + Metron
Earth (पृथ्वी) Measurement (मापन)

☞ यूक्लिड को ज्यामिति का जनक कहा जाता है। (Euclid is called the father of geometry).

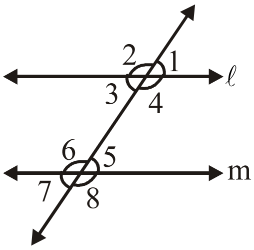
रेखा और कोण (Line and Angle)

बिन्दु (Point) (•): एक निश्चित सूक्ष्म चिह्न (A point is an exact location)	**रेखा (Line):** रेखा बिन्दुओं का समूह है जो दोनों ओर अनन्त की ओर अग्रसर है। A line is group of point leading to infinity on both sides.	**समतल (Plane):**  दो आयामों वाली ऐसी चपटी सतह जिसकी मोटाई शून्य हो। A two dimensional flat surface with zero thickness.
संरेख बिन्दु (Colliner points):  तीन या अधिक बिन्दु एक ही रेखा पर हो। Three or more point that lie on the same line.	**रेखा खण्ड (Line Segment):** एक निश्चित लम्बाई वाली रेखा। A line segment has a definite length.	**प्रतिच्छेदी रेखाऐं (Intersecting Line):** 
असंरेख बिन्दु (Non Collinear Points):  तीन या अधिक बिन्दु एक रेखा पर स्थित न हो। Three or more points that do not lie on the same line.	**किरण (Rays):** एक दिशीय लम्बाई वाली रेखा। A line with uni-direction length.	**समान्तर रेखाऐं (Parallel Lines):** 
लम्बवत् रेखाऐं (Perpendicular Lines): 	**संगामी/समवर्ती रेखाऐं (Concurrent Lines):** 	**तिर्यक रेखा (Transversal Line):** 
कोण (Angle): दो सीधी रेखाओं का झुकाव। Inclination (tilt) between the two straight line. 	**न्यूनकोण (Acute Angle):**  $0 < \theta < 90$	**समकोण (Right Angle):**  $\angle\theta = 90$
अधिक कोण (Obtuse Angle):  $90 < \theta < 180$	**ऋजुकोण (Straight Angle):** $\theta = 180$	**प्रतिवर्ती कोण (Reflex Angle):**  $180° < \theta < 360°$

सम्पूर्ण/ वृत्तीय कोण (Whole/ Circle Angle): $\boxed{\theta = 360^\circ}$	पूरक/कोटिपूरक कोण (Complementary Angle):	सम्पूरक/अनुपूरक कोण (Supplementary Angle):
	 $\boxed{\alpha + \beta = 90}$ If $\alpha = x$ then $\beta = (90 - x)$	$\boxed{\alpha + \beta = 180}$ If $\alpha = x$ then $\beta = (180 - x)$

तिर्यक रेखा पर आधारित कोण (Angle Based on Transversal Line)

यदि/If $\ell \parallel m$



शीर्षाभिमुख कोण (Vertically opposite Angle):

$\angle 1 = \angle 3$ $\quad \angle 2 = \angle 4$

$\angle 5 = \angle 7$ $\quad \angle 6 = \angle 8$

अन्तः एकान्तर कोण (Interior Alternative Angle):

$\angle 3 = \angle 5$ $\quad \angle 4 = \angle 6$

बाहएकान्तर कोण (Exterior Alternative Angle):

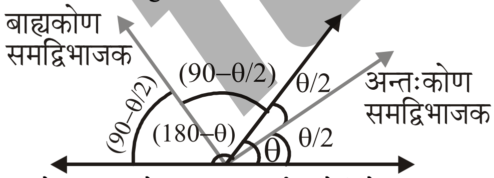
$\angle 1 = \angle 7$ $\quad \angle 2 = \angle 8$

संगत कोण (Corresponding Angle):

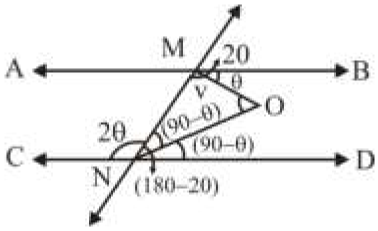
$\angle 1 = \angle 5$ $\quad \angle 2 = \angle 6$

$\angle 3 = \angle 7$ $\quad \angle 4 = \angle 8$

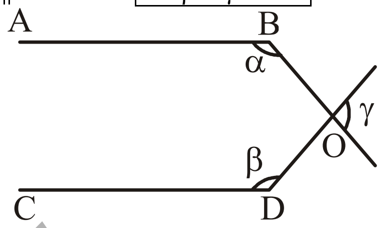
- किसी कोण के अन्तः कोण और बाह्य कोणों के समद्विभाजक के बीच का कोण 90° होता है।
  The angle made by the bisector of the interior angle and exterior angle is 90°.



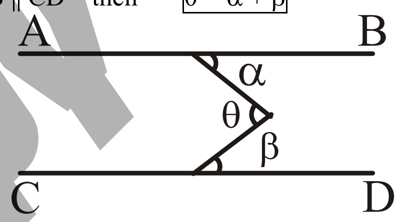
- यदि दो समान्तर रेखाएं एक तिर्यक छेदी रेखा द्वारा प्रतिच्छेदित हो तब अतः कोणों के समद्विभाजक द्वारा 90° का कोण बनता है।
  If two parallel lines are intersected by a intersecting line then the angle formed by the bisector of the interior angles is 90°.
  $\angle MON = 90^\circ$



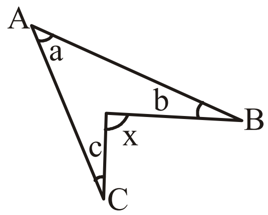
- If AB || CD then $\boxed{\alpha + \beta + \gamma = 360^\circ}$



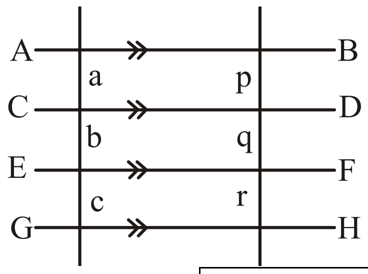
- If AB || CD then $\boxed{\theta = \alpha + \beta}$



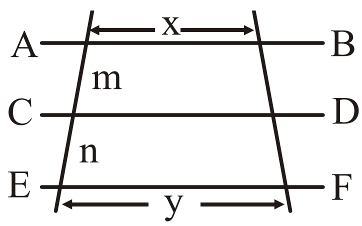
- **कैंची प्रमेय (Scissors' theorem):**



$\boxed{x = a + b + c}$

- 

$\boxed{a:b:c = p:q:r}$ $\quad \boxed{\dfrac{a}{(a+b+c)} = \dfrac{p}{(p+q+r)}}$

- 

$\boxed{\dfrac{AC}{CE} = \dfrac{BD}{DF} = \dfrac{m}{n}}$ $\quad \boxed{CD = \dfrac{my + nx}{m + n}}$

त्रिभुज (Triangle)

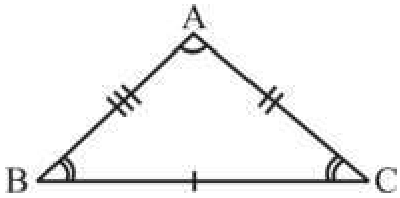
त्रिभुज = त्रि + भुज	Triangle = Tri + Angle
त्रि → तीन, भुज → भुजाएँ	Tri → Three, Angle → Angle

"तीन भुजाओं से बन्द आकृति को त्रिभुज कहते है।"

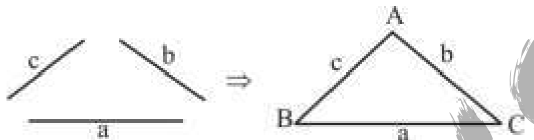
"A closed figure with three sides in called triangle"

☞ त्रिभुज में तीन भुजाएं तथा तीन कोण होते हैं।

A triangle has three sides and three vertices.



त्रिभुज का निर्माण (त्रिभुज की असमिका)
Construction of triangle (Inequality of triangle)



(i) त्रिभुज की किन्हीं दो भुजाओं का योग तीसरी भुजा से बड़ा होना चाहिऐ।

The sum of any two sides of the triangle must be greater than the third side-

$(a + b) > c$ $\quad$ $(b + c) > a$ $\quad$ $(c + a) > b$

(ii) त्रिभुज की किन्हीं दो भुजाओं का अन्तर तीसरी भुजा से छोटा होना चाहिए।

The difference of any two sides of the triangle must be less than the third side.

$|a - b| < c$ $\quad$ $|b - c| < a$ $\quad$ $|c - a| < b$

भुजाओं के आधार पर त्रिभुज के प्रकारः

(Types of the triangles on the basis of sides):

1. विषमबाहु त्रिभुज (Scalene Triangle)
2. समद्विबाहु त्रिभुज (Isosceles Triangle)
3. समबाहु त्रिभुज (Equilateral Triangle)

कोणों के आधार पर त्रिभुज के प्रकार

(Types of the triangles on the basis of angles):

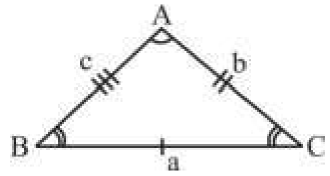
1. समकोण त्रिभुज (Right Angle Triangle)
2. न्यूनकोण त्रिभुज (Acute Angle Triangle)
3. अधिक कोण त्रिभुज (Obtuse Angle Triangle)

भुजाओं के आधार पर त्रिभुज

(The triangles on the basis of sides):

1. विषमबाहु त्रिभुज (Scalene Triangle): "ऐसा त्रिभुज जिसकी तीनों भुजाये भिन्न-भिन्न हों उसे विषमबाहु त्रिभुज कहते हैं। विषमबाहु त्रिभुज के तीनों कोण भिन्न-भिन्न होते हैं।"

"A scalene triangle is a triangle in which all three sides have different lengths."



$AB \neq BC \neq CA$

$\angle C \neq \angle A \neq \angle B$

त्रिभुज का परिमाप (Perimeter of triangle):

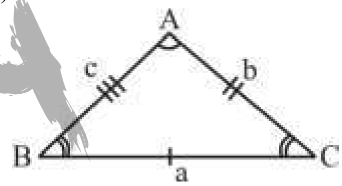
$$p = (a + b + c)$$

त्रिभुज का अर्ध-परिमाप (Semi-perimeter of triangle):

$$s = \frac{(a+b+c)}{2}$$

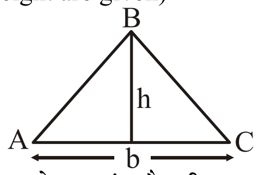
विषमबाहु त्रिभुज में क्षेत्रफल (Area in scalene triangle):

(i) जब तीनो भुजाऐ दी गयी हो (when three sides are given):



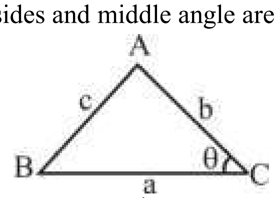
$$\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$ ***(Heron's Formula)***

(ii) जब आधार भुजा और ऊँचाई दी गयी हो (when base and height are given)



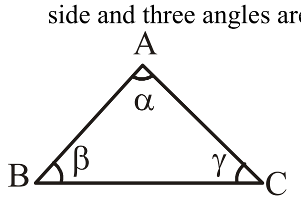
$$\Delta = \frac{1}{2} \times b \times h$$

(iii) जब दो भुजाएं और बीच का कोण दिया हो (when two sides and middle angle are given)



$$\Delta = \frac{1}{2} ab \sin\theta$$

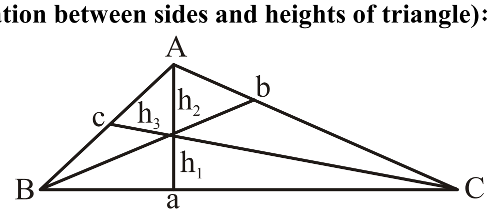
(iv) जब एक भुजा और तीन कोण दिये गये हो (when one side and three angles are given)



$$\Delta = \frac{1}{2} \times a^2 \frac{\sin\beta \times \sin\gamma}{\sin\alpha}$$

त्रिभुज की भुजाओं और ऊँचाईयों में सम्बन्ध

(Relation between sides and heights of triangle):



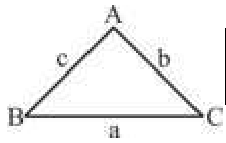
$\Rightarrow \quad \Delta = \frac{1}{2} a \times h_1, \quad \Delta = \frac{1}{2} b \times h_2, \quad \Delta = \frac{1}{2} c \times h_3$

$\frac{1}{2} a \times h_1 = \frac{1}{2} b \times h_2 = \frac{1}{2} c \times h_3$

$\therefore \; ah_1 = bh_2 = ch_3$

$$\boxed{h_1 : h_2 : h_3 = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}}$$

Sine Rule (ज्या नियम) :



$$\boxed{\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin c} = 2R}$$

R → Circum Radius बाह्य त्रिज्या

$$\boxed{\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin c} = K}$$ (K= नियतांक Constant)

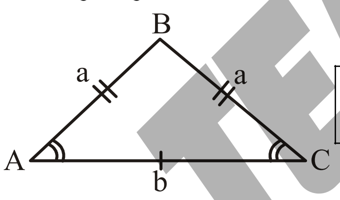
कोज्या नियम (Cosine Rule):

$\text{Cos}A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

$\text{Cos}B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \Rightarrow b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$

$\text{Cos}C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

(2) समद्विबाहु त्रिभुज (Isosceles Triangle):



$$\boxed{\begin{array}{l} AB = BC \neq AC \\ \angle C = \angle A \neq \angle B \end{array}}$$

त्रिभुज का परिमाप (Perimeter of triangle):

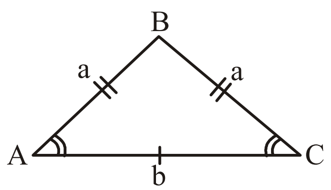
$$\boxed{p = 2a + b}$$

त्रिभुज का अर्ध-परिमाप (Semi-perimeter of triangle):

$$\boxed{s = \frac{2a + b}{2}}$$

समद्विबाहु त्रिभुज में क्षेत्रफल (Area in Isosceles Triangle):

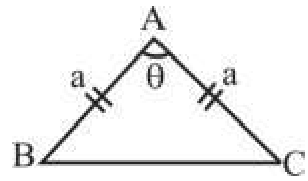
(i)



$\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-a)(s-b)}$

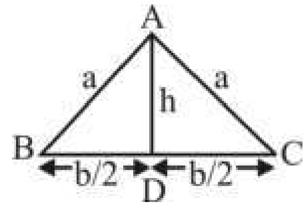
$$\boxed{\Delta = (s\text{-}a)\sqrt{s(s-b)}}$$

(ii)



$$\boxed{\Delta = \frac{1}{2} a^2 \sin\theta}$$

(iii)



Δ ABD में पाईथागोरस प्रमेय से,

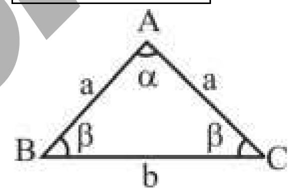
$$\boxed{h = \frac{1}{2}\sqrt{(4a^2 - b^2)}}$$

$\because \; \Delta = \frac{1}{2} \times b \times h$

$\Delta = \frac{1}{2} \times b \times \frac{1}{2}\sqrt{4a^2 - b^2}$

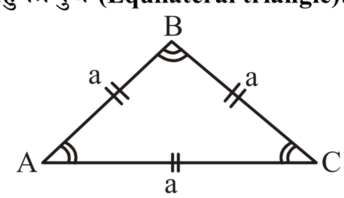
$$\boxed{\Delta = \frac{1}{4} b\sqrt{4a^2 - b^2}}$$

(iv)



$$\boxed{\Delta = \frac{1}{2} \frac{b \sin^2\beta}{\sin\alpha}}$$

समबाहु त्रिभुज (Equilateral triangle):



$AB = BC = CA = a$

$\angle C = \angle A = \angle B = 60^\circ$

समबाहु त्रिभुज में परिमाप
(Perimeter in equilateral triangle):

$$\boxed{p = 3a}$$

समबाहु त्रिभुज में अर्द्ध-परिमाप
(Semi-perimeter in equilateral triangle):

$$\boxed{s = \frac{3a}{2}}$$

समबाहु त्रिभुज में ऊँचाई (Height in equilateral triangle):

$$\boxed{h = \frac{\sqrt{3}}{2} a}$$

समबाहु त्रिभुज में क्षेत्रफल (Area in equilateral triangle):

$$\boxed{\Delta = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2}$$

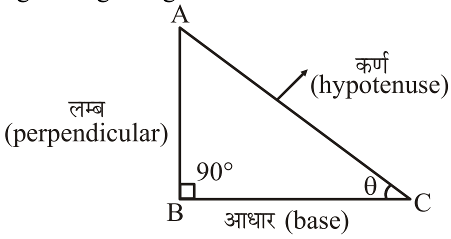
TEAM SPV

कोणों के आधार पर त्रिभुज के प्रकार

(The triangle based on angles):

1. समकोण त्रिभुज (Right angled triangle): यदि त्रिभुज का एक कोण समकोण (90^0) का होता है तो त्रिभुज समकोण कहलाता है।

A right angled triangle is a triangle in which one angle is right angle.



क्षेत्रफल (Area):

$$\Delta = \frac{1}{2} \times BC \times AB$$

पाइथागोरस प्रमेय (Phythagoras theorem): समकोण त्रिभुज में, कर्ण का वर्ग शेष दो भुजाओं के वर्गों के योगफल के बराबर होता है।

In right angled triangle, the square of the hypotenuse is equal to the sum of the square of the other two sides.

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

पाइथागोरस ट्रिपलेट (Pythagoras triplets): तीन पूर्णांकों का समूह जो पाइथागोरस प्रमेय को सन्तुष्ट करें।

A set of three integers triangles which satisfy Pythagoras theorem. **Ex.**: (3, 4, 5)

यदि (a, b, c) पाइथागोरस ट्रिपलेट है तो (ak, bk, ck) तथा $\left(\frac{a}{k}, \frac{b}{k}, \frac{c}{k}\right)$ पाइथागोरस ट्रिपलेट होंगे।

If (a, b, c) be a Pythagoras triplets, then (ak, bk, ck) or $\left(\frac{a}{k}, \frac{b}{k}, \frac{c}{k}\right)$ will also be the phythagoras triplet.

निम्न पाइथागोरस ट्रिपलेट परीक्षाओं में बहुतायत प्रयोग किये जाते हैं-

Following Pythagoras triplets are frequently used in the examination :

$\Rightarrow$ (3, 4, 5)$\rightarrow$(6, 8, 10), (9,12,15) (12,16,20) (15, 20, 25)

$\Rightarrow$ (5, 12, 13)$\rightarrow$(10, 24, 26) (15, 36, 39) (2.5, 6, 6.5)

$\Rightarrow$ (7, 24, 25)$\rightarrow$(14, 28, 50), (3.5, 12, 12.5) (21, 72, 75)

$\Rightarrow$ (9, 40, 41), (12, 35, 37), (20, 21, 29) , (13, 84, 85)

$\Rightarrow$ (8, 15, 17), (11, 60, 61), (20, 99, 101) (39, 80, 89)

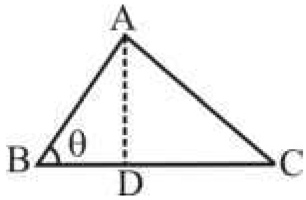
$\Rightarrow$ $(2ab, a^2 - b^2, a^2 + b^2)$ $[2n, (n^2-1), (n^2+1)]$

$\Rightarrow$ $(1, 1, \sqrt{2})$ $(1, \sqrt{3}, 2)$

2. न्यूनकोण त्रिभुज (Acute angled triangle):

यदि त्रिभुज के तीनों कोण न्यूनकोण हो तो त्रिभुज न्यूनकोण (0^0 और 90^0 के बीच) त्रिभुज कहलाता है।

In acute angled triangle is a trianlg in which all the interior angles are acute angles (all the three angles are between 0° and 90°).



$$0 < \theta < 90$$

पहचान (Identity):

$$AC^2 < AB^2 + BC^2$$

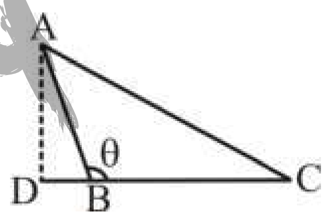
न्यूनकोणीय प्रमेय (Acute angled theorem):

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2BC.BD$$

3. अधिक कोण त्रिभुज (Obtuse angled triangle):

यदि किसी त्रिभुज का एक कोण अधिक कोण 90° से अधिक है तो इसे अधिक कोण त्रिभुज कहेगें।

An obtuse angle triangle is a triangle in which any one of the angles is an obtuse angles or more than 90°.



$$90 < \theta < 180$$

पहचान (Identity):

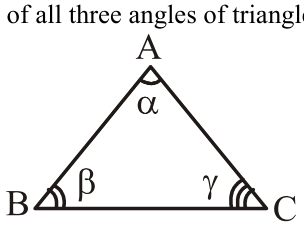
$$AC^2 > AB^2 + BC^2$$

अधिक कोण प्रमेय (Obtuse angled theorem):

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2\,BD.BC$$

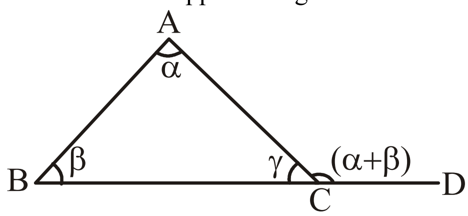
त्रिभुज के गुण (Properties of triangle):

1. त्रिभुज के तीनों कोणों का योग 180° होता है। The sum of all three angles of triangles is 180°.



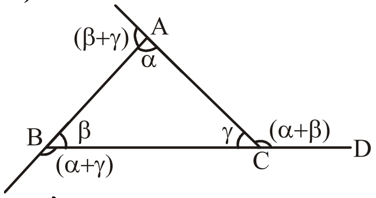
$$\alpha + \beta + \gamma = 180$$

2. (i) बाह्यकोण प्रमेय (External angled theorem): यदि किसी त्रिभुज की एक भुजा को बढ़ाया जाये तो इस प्रकार बना कोण दो विपरीत अन्तः सम्मुख कोणों के योग के बराबर होता है। If a side of a triangle is produced then the exterior angle so formed is equal to the sume of the two interior opposite angles.



$$\angle ACD = \alpha + \beta$$

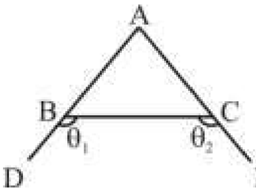
(ii) **बाह्य कोणों का योग (The sum of external angles):**



योग (Sum) = $2(\alpha + \beta + \gamma)$

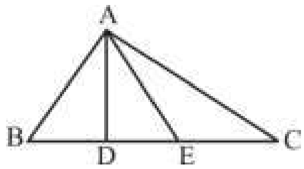
$= 2 \times 180° \Rightarrow 360°$

3.



$\boxed{\theta_1 + \theta_2 = 180 + A}$

4.

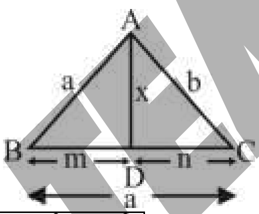


AD → (Altitude)

AE→∠A का अन्तः (Angle Bisectr f∠A) कोण समद्विभाजक

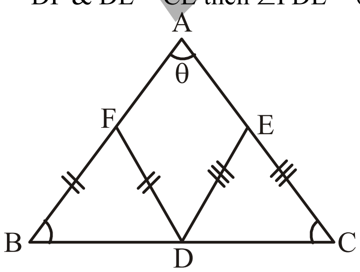
$\boxed{DAE = \frac{\angle B - \angle C}{2}}$

5. **(Stewart theorem) स्टीवर्ट प्रमेयः**

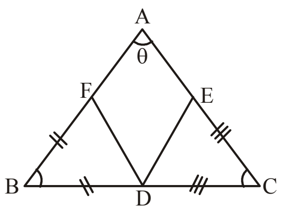


$\boxed{a(x^2 + mn) = b^2m = c^2n}$

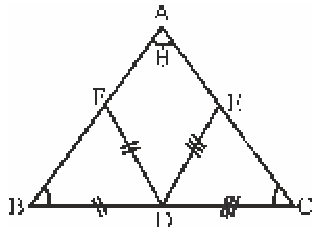
6. (i) If BF = DF & DE = CE then ∠FDE = θ



(ii) If BD = BF & CE = CD then $\angle FDE = \left(90 - \frac{\theta}{2}\right)$



(iii) If FD = DB & ED = DC then ∠FDE=(180 – 2θ)



त्रिभुज की सर्वांगसमता तथा समरूपता (Congruency & Similarity of triangle)

सर्वांगसमता (Congruency):

दो Δ सर्वांगसम कहे जाते हैं-

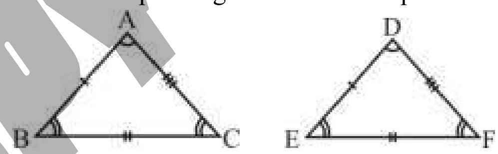
Two triangles are said to be Congruent-

(i) उनके संगत कोण बराबर हो।

Their Corresponding angles are equal.

(ii) उनकी संगत भुजाए भी बराबर हो।

Their corresponding sides are also equal.



∠ A = ∠ D		AB = DE
∠ B = ∠ E	&	BC = EF
∠ C = ∠ F		AC = DF

$\boxed{\Delta ABC \cong \Delta DEF}$

{≅ is the sign of Congruency}

Conditions (स्थितियाँ):

SSS (Side-Side-Side)/ (भुजा - भुजा - भुजा),

SAS (Side-Angle-Side)/ (भुजा - कोण - भुजा),

AAS (Angle-Angle-Side) pair/(कोण-कोण-भुजा) युग्म

RHS (Right Angl-Hypotenuse-Side/(समकोण-कर्ण-कोण)

नोटः सर्वांगसमता में भुजाएँ बराबर होना चाहिए-

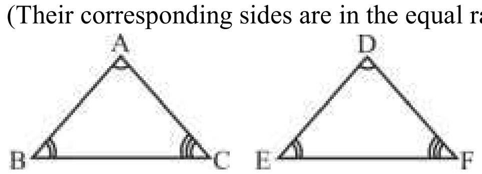
(In congruency, sides must be equal-

समरूपता (Similarity): दो त्रिभुज समरूप कहे जाते हैं (Two triangles are said to be Similar) :

(i) उनके संगत कोण बराबर हो (Their Corresponding angles are equal)

(ii) उनकी संगत भुजाऐ समानुपाती हों।

(Their corresponding sides are in the equal ratio)



∠ A = ∠ D

∠ B = ∠ E & $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$

∠ C = ∠ F

अतः Hence $\boxed{\Delta ABC \sim DEF}$

{"~" is the sign of similarity}

TEAM SPY

स्थितियाँ (Conditions):

AAA (Angle-Angle-Angle)/ (कोण-कोण-कोण)

SSS (Side-Side-Side) / (भुजा-भुजा-भुजा)

SAS (Side-Angle-Side)/ (भुजा-कोण-भुजा)

AA (Angle-Angle) / (कोण-कोण)

Note: समरूप त्रिभुजों में भुजाएं अनुपातक होती हैं।

In similar triangles, sides are in-equal ratio.

विशेषताएँ (Properties):

1. समरूप त्रिभुजों में प्रत्येक संगत लम्बाई का अनुपात बराबर होता है।

   In Similar triangles ratio of each corresponding length is equal

   $\frac{AB}{DE}=\frac{BC}{EF}=\frac{AC}{DF}=\frac{h_1}{h_2}=\frac{r_1}{r_2}=\frac{R_1}{R_2}=$

   $\frac{\text{Perimeter of }\Delta ABC}{\text{Perimeter of }\Delta DEF}=\frac{\text{Semi perimeter }\Delta ABC}{\text{Semiperimeter }\Delta DEF}=$

   $\frac{\text{Median}_1}{\text{Median}_2}=\frac{\text{Angle Bisector}_1}{\text{Angle Bisector}_2}$

2. समरूप Δ में, त्रिभुजों के क्षेत्रफल का अनुपात उनकी संगत लम्बाईयों के वर्ग के अनुपात के बराबर होता है।

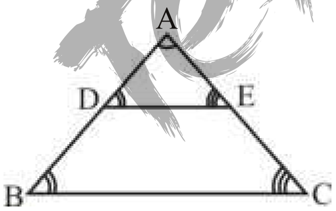
   In similar triangles, the area of triangles is equal to the ratio of square of corresponding length.

   $\frac{\text{Area of }\Delta ABC}{\text{Area of }\Delta DEF}=\left(\frac{AB}{DE}\right)^2=\left(\frac{BC}{EF}\right)^2=\left(\frac{AC}{DF}\right)^2=$

   $\left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2=\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2=\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2=\left(\frac{\text{Median}_1}{\text{Median}_2}\right)^2=\left(\frac{\text{Angle Bisector}_1}{\text{Angle Bisector}_2}\right)^2$

   $\left(\frac{\text{Perimeter of }\Delta ABC}{\text{Perimeter of }\Delta DEF}\right)^2=\left(\frac{\text{Semi perimeter }\Delta ABC}{\text{Semiperimeter }\Delta DEF}\right)^2$

3. थेल्स प्रमेय (Thales' Theorem)



⇒ If DE ∥ BC then $\boxed{\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}}$

⇒ If $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$ then $\boxed{DE \parallel BC}$

महत्वपूर्ण निष्कर्ष (Important Results) :

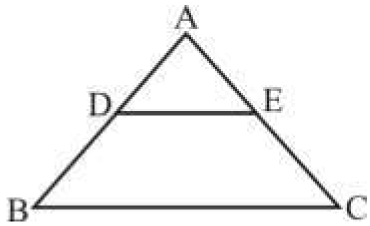
(i) $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$

(ii) Δ ADE ~ Δ ABC

(iii) $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$

(iv) $\frac{Ar(\Delta ADE)}{Ar(ABC)}=\left(\frac{AD}{AB}\right)^2=\left(\frac{AE}{AC}\right)^2=\left(\frac{DE}{BC}\right)^2$

4. **मध्य बिन्दु प्रमेय (Mid Point Theorem)**



(i) यदि D तथा E क्रमशः रेखा AB और AC के मध्य बिन्दु हो, तो

If D and E are mid points of AB and AC respectively then,

$\boxed{DE \parallel BC}$ and $\boxed{DE=\frac{BC}{2}}$

(ii) यदि DE ∥ BC तथा D, AB का मध्य बिन्दु है तब E, AC का मध्य बिन्दु होगा।

If DE ∥ BC and D is the mid point of AB, then E is the mid point of AC.

महत्वपूर्ण निष्कर्ष (Important Results):

(i) $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}=\frac{1}{1}$

(ii) Δ ADE ~ Δ ABC

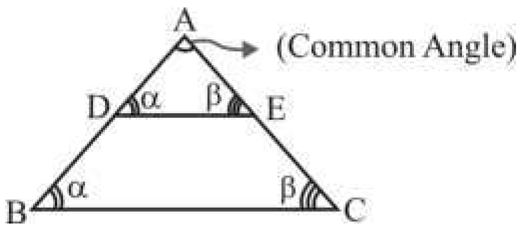
(iii) $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}=\frac{1}{2}$

(iv) $\frac{\Delta ADE\text{ Area}}{ABC\text{ Area}}=\frac{1}{4}$

(v) $\frac{\Delta ADE\text{ Area}}{\square DECB\text{ Area}}=\frac{1}{3}$

समरूप आकृतियाँ (Similar Figures)

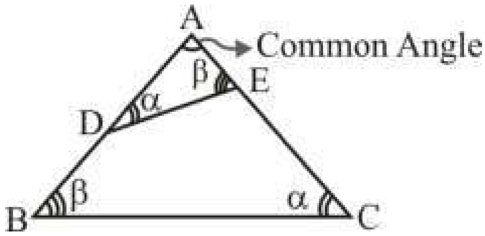
(i)



$\boxed{\Delta ADE \sim \Delta ABC}$

$\boxed{\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}}$

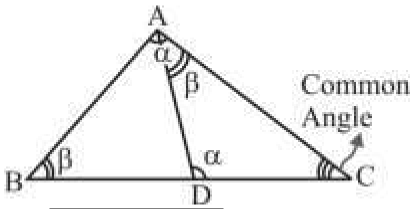
(ii)



$\boxed{\Delta ADE \sim \Delta ACB}$

$\boxed{\frac{AD}{AC}=\frac{AE}{AB}=\frac{DE}{BC}}$

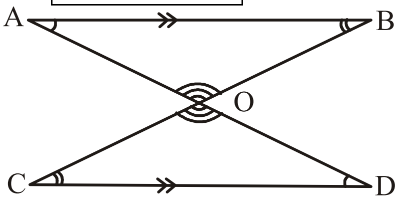
(iii)



$\boxed{\Delta ABC \sim \Delta DAC}$

$\boxed{\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{AC} = \frac{AC}{CD}}$

(iv)

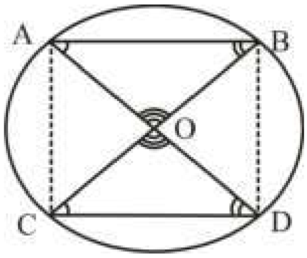


If AB || CD

$\boxed{\Delta AOB \sim \Delta DOC}$

then, $\frac{AO}{DO} = \frac{BO}{CO} = \frac{AB}{CD}$

(v)



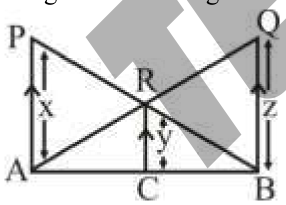
$\boxed{\Delta ADB \sim \Delta COD}$

$\boxed{\frac{AO}{OC} = \frac{BO}{OD} = \frac{AB}{CD}}$

''एक ही वृत्त खण्ड के कोण बराबर होते हैं।''

"Angles of same segment are equals"

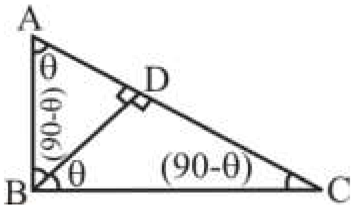
(vi)



$\boxed{\frac{1}{y} = \frac{1}{x} = \frac{1}{z}}$ $\frac{1}{y} = \frac{z+x}{xz}$

$\boxed{xz = xy + yz}$

समकोण Δ में समरूपता (Similarity in Right Angle Triangle) :



If BD ⊥ AC

Δ ABC ~ ΔADB ~ ΔBDC

समरूपता से (From Similarity):

(i) बिन्दु A से (from Point A): $\boxed{AB^2 = AD \times AC}$

(ii) बिन्दु D से (from Point D): $\boxed{DB^2 = DA \times DC}$

(iii) बिन्दु C से (from Point C): $\boxed{CB^2 = CD \times CA}$

(iv) क्षेत्रफल से (from Area) :

$$\Delta\ ABC\ \text{Area} = \frac{1}{2}\ BC \times AB = \frac{1}{2} AC \times DB$$

$\therefore$ $\boxed{BC \times AB = AC \times DB}$

$\Rightarrow$ $\boxed{\frac{1}{BD^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{BC^2}}$

सर्वांगसमता तथा समरूपता में संबन्ध
(Relation between similarity and congruity)

(i) यदि दो त्रिभुज आपस में सर्वांगसम हैं तो वे आपस में समरूप भी होंगे।
If two triangles are congruent then they must be similar.

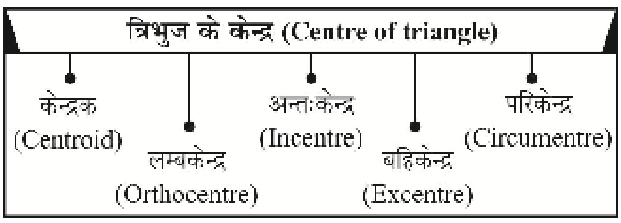
(ii) यदि दो Δ आपस में समरूप हैं तो यह आवश्यक नहीं है कि वे आपस में सर्वांगसम भी हों।
If two triangles are similar then it is not necessary that they are congruent.

(iii) यदि दो त्रिभुज सर्वांगसम हैं तो वे उनके क्षेत्रफल बराबर होते हैं।
If two triangles are congruent then their area are equal.

(iv) यदि दो त्रिभुज के क्षेत्रफल बराबर हैं तो यह आवश्यक नहीं है कि वे सर्वांगसम हों।
If areas of two triangles are equal then It is not necessary that they are Congruent.

(v) यदि दो समरूप त्रिभुजों का क्षेत्रफल बराबर है तो वे सर्वांगसम त्रिभुज होंगे।
If areas of two similar triangles are equal then they are congruent.

त्रिभुज के केन्द्र (Centres of Triangle)



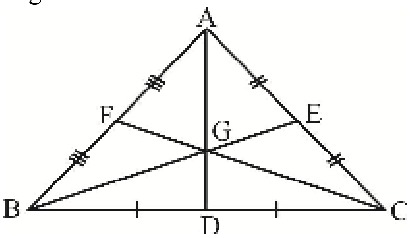
केन्द्रक (Centroid)

■ किसी त्रिभुज की **माध्यिकाओं** का प्रतिच्छेद बिन्दु केन्द्रक कहलाता है। इसे गुरुत्व केन्द्र भी कहते हैं। इसे G से निरूपित करते हैं।
The point of intersection of the **medians** of the triangle is called the centroid. It is also called gravity centre. It is denoted by "G".

TEAM SPY

माध्यिका (Median) : त्रिभुज की माध्यिका, एक शीर्ष और उस शीर्ष के सामने की भुजा के मध्य बिन्दु से होकर जाने वाली एक सीधी रेखा है जो उस भुजा को दो बराबर भागों में काटती है।

A median of a triangle is a line segment joining a vertex to the midpoint of the opposite side, thus bisecting that side.



जहाँ AD, BE तथा CF त्रिभुज की माध्यिकाएं तथा G केन्द्रक है।

Where AD, BE and CF are the medians and G is the centroid.

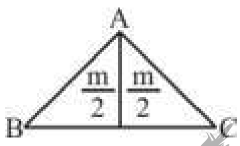
महत्वपूर्ण गुण (Important Properties):

(1) $\frac{AG}{GD}=\frac{BG}{GE}=\frac{CG}{GF}=\frac{2}{1}$

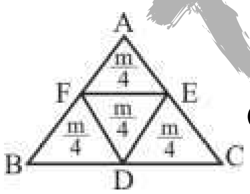
(2) यदि ΔABC का क्षेत्रफल m इकाई^2, AD, BE तथा CF तीन माध्यिकाऐं और G केन्द्रक हो।

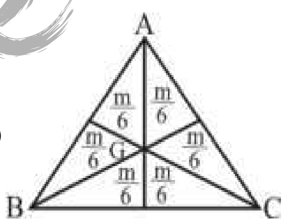
If the area of ΔABC is m unit^2, AD, BE and CF are medians and G is the centroid.

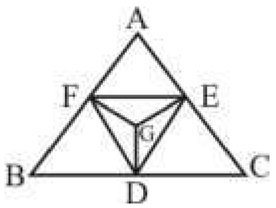
तब/then,

(i) 

(ii)

(iii) 

(iv) 

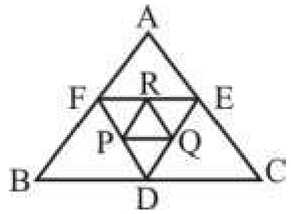
(v) 

➢ Δ DEF का केन्दक भी G होगा।

Centroid of ΔDEF is also G.

➢ (ΔGEF) Ar = (ΔGFD) Ar = (ΔGDE) Ar = $\left(\frac{m}{4}\right)\frac{1}{3}$

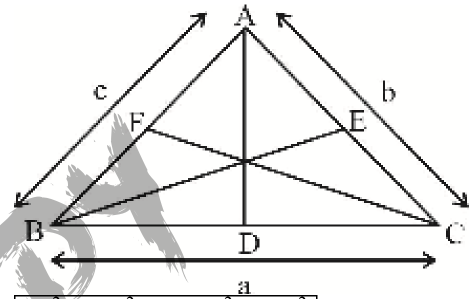
$\Rightarrow \frac{\mathbf{m}}{\mathbf{12}}$ {जहाँ/Where, Ar $\rightarrow$ क्षेत्रफल/area}

(vi) 

➢ (ΔPQR) Ar =(ΔFRP) Ar = (ΔERQ) Ar = (ΔDPQ) Ar $=\left(\frac{m}{4}\right)\frac{1}{4}$

$\Rightarrow \frac{\mathbf{m}}{\mathbf{16}}$

(vii) अपोलोनियस प्रमेय (Apollonius Theorem):

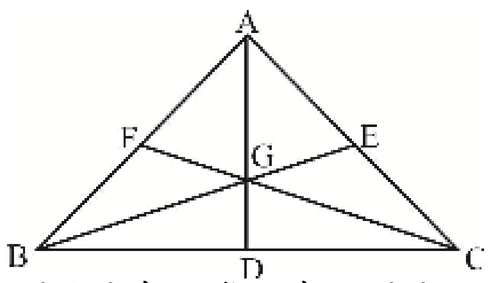


$\boxed{AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)}$

तब/then,

$$AD=\frac{1}{2}\sqrt{2c^2+2b^2-a^2}$$
$$BE=\frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2c^2-b^2}$$
$$CF=\frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}$$

(viii)



➢ त्रिभुज की किन्हीं दो भुजाओं का योगफल तीसरी भुजा पर खींची गयी माध्यिका के दुगने से अधिक होता है।

The sum of any two sides of a triangle is greater than twice the median drawn to the third side.

$\boxed{AB + AC > 2AD}$

➢ त्रिभुज का परिमाप (भुजाओं का योगफल), माध्यिकाओं के योगफल से हमेशा बड़ा होता है।

Perimeter of triangle (sum of sides) is always greater than sum of medians.

$\boxed{(AB + BC + CA > (AD + BE + CF)}$

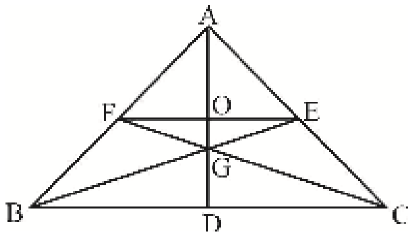
- $\boxed{3(AB+BC+CA) < 4(AD+BE+CF)}$
- $\boxed{3(AB^2 + BC^2 + CA^2) = 4(AD^2 + BE^2 + CF^2)}$
- ΔABC का क्षेत्रफल = $\frac{4}{3}$ [माध्यिकाओं AD, BE तथा CF को भुजा मानते हुए Δ का क्षेत्रफल]

  Area of ΔABC = $\frac{4}{3}$ [Area of Δ considering medians AD, BE and CF as side]

(ix) यदि O, माध्यिका AD का मध्य बिन्दु हो-

If O, is the mid point of median AD

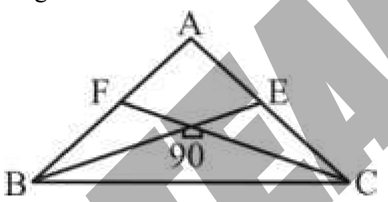
तब/then,



$\boxed{AO : OG : GD = 3 : 1 : 2}$

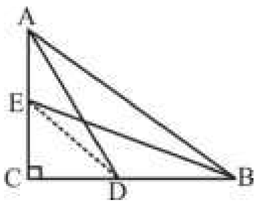
(x) यदि Δ की दो माध्यिकाऐं एक दूसरे को समकोण पर प्रतिच्छेद करती है।

If two medians of a triangle intersect each other at right angle.



$\boxed{AB^2 + AC^2 = 5BC^2}$

(xi) यदि AD और BE माध्यिकाऐं है/If AD and BE are medians-



$$AD^2 + BE^2 = AB^2 + ED^2$$

$$(AD^2 + BE^2) = 5ED^2 \qquad 4(AD^2 + BE^2) = 5AB^2$$

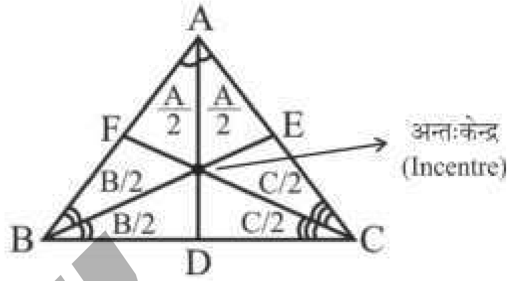
$$\left\{ ED = \frac{AB}{2} \Rightarrow AB = 2ED \right.$$

E, D → मध्य बिन्दु/mid points

अन्तः केन्द्र (Incentre)

किसी त्रिभुज के अन्तः कोणों को समद्विभाजित (दो बराबर भाग) करने वाली रेखाएँ जिस बिन्दु पर मिलती है। उसे अन्तः केन्द्र कहते हैं।

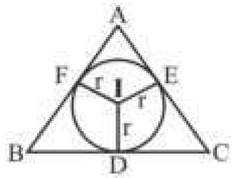
Lines bisecting internal angles (in two equal part) of a triangle meet at a point. The point is called incentre of the triangle.



विशेषताऐं (Properties):

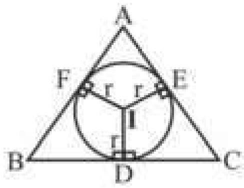
(1) अन्तःकेन्द्र को केन्द्र मानकर बना वृत्त अन्तःवृत्त कहलाता है तथा इसकी त्रिज्या को अन्तः त्रिज्या कहते हैं।

The circle formed considering the incentre as the centre is called incircle and its radius is called inradius.



(2) (i) अन्तःकेन्द्र त्रिभुज की तीनों भुजाओं से समान दूरी पर होता है।

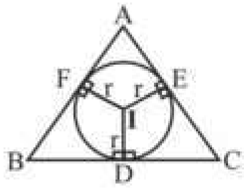
The incentre is equidistant from all three sides of triangle.



$\boxed{ID = IE = IF = r}$

(ii) अन्तः वृत्त की त्रिज्या, त्रिभुज की भुजा पर लम्ब होती है।

Inradius is perpendicular on side of triangle.



$ID \perp BC$

$IE \perp AC$

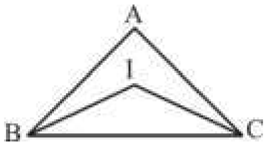
$IF \perp AB$

(3) किसी भी Δ का अन्तःकेन्द्र, Δ के अन्दर होता है।

The incentre of any triangle is inside the triangle.

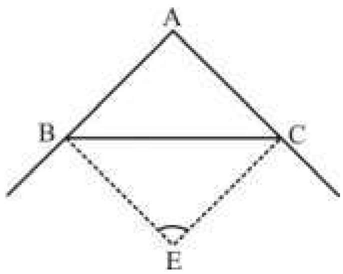
TEAM SPY

(4) त्रिभुज के किन्हीं दो अन्तःकोण द्विभाजकों के मध्य बना कोण
The angle formed between any two interior bisectors of a triangle.



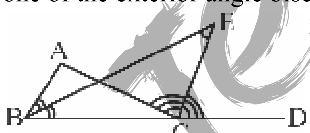
$\angle BIC = 90 + \frac{\angle A}{2}$

(ii) त्रिभुज के किन्ही दो बाह्य कोण समद्विभाजकों के मध्य बना कोण :
The Angle formed between any two exterior bisectors of a triangle:



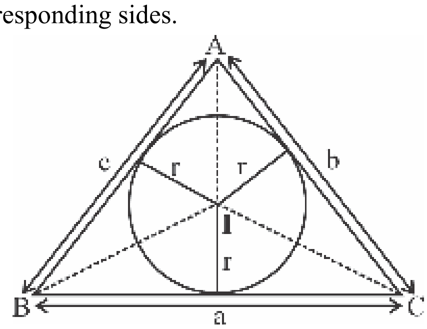
$\angle BEC = 90 - \frac{A}{2}$

(iii) त्रिभुज के किसी एक अन्तःकोण द्विभाजक और किसी एक बाह्य कोण द्विभाजक के बीच बना कोण-
The angle between one of the interior angle bisectors and one of the exterior angle bisectors of a triangle:



$\angle BEC = \frac{\angle A}{2}$

(5) (i) अन्तःकेन्द्र और तीनों बिन्दुओं द्वारा बनाए गये त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात उनकी संगत भुजाओं के अनुपात में होता है।
The ratio of the areas of the triangles formed by the incentre and the three points is proportional to their corresponding sides.



$(\Delta BIC)\ Ar : (\Delta CIA)\ Ar : (\Delta AIB)\ Ar = a : b : c$

(ii)

$r = \frac{\Delta}{S}$ $\quad \left\{ S = \frac{a+b+c}{2} \right\}$

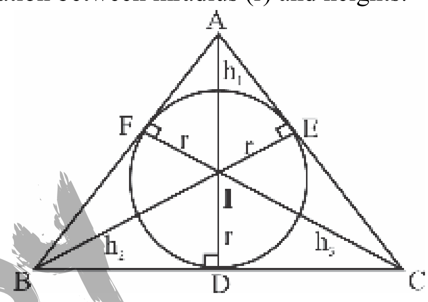
जहाँ/where,

$r \rightarrow$ अन्तः त्रिज्या/Inradius

$\Delta \rightarrow$ त्रिभुज का क्षेत्रफल/Area of triangle

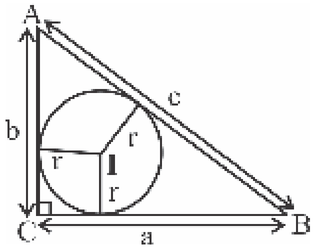
$S \rightarrow$ त्रिभुज का अर्द्ध परिमाप/Semi perimeter of triangle.

(iii) त्रिभुज की अन्तवृत्त की त्रिज्या तथा ऊँचाईयों में सम्बन्धः
Relation between inradius (r) and heights:



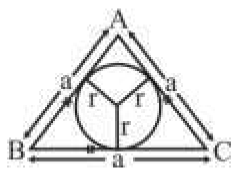
$\frac{1}{r} = \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3}$

(iv) समकोण Δ में अन्तः वृत्त की त्रिज्याः
Inradius in the right angle triangle:



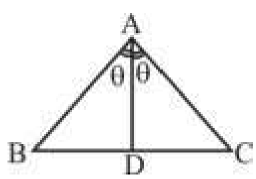
$r = \frac{a+b-c}{2}$

(v) समबाहु Δ में अन्तःवृत्त की त्रिज्याः
Inradius in the equilateral triangle:



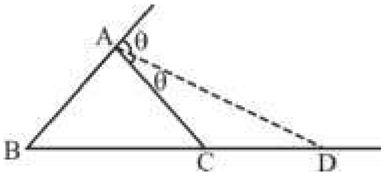
$r = \frac{a}{2\sqrt{3}}$

(6) (i) अन्तः कोण समद्विभाजक कोणः
Interior Angle bisector theorem:



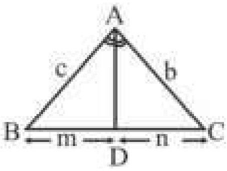
$\frac{AB}{AC} = \frac{DB}{DC}$

(ii) बाह्य कोण समद्विभाजक प्रमेयः
Exterior angle Bisector theorem:



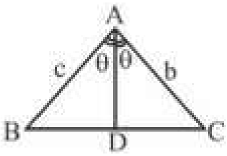
$$\frac{AB}{AC} = \frac{DB}{DC}$$

(iii) AD, $\angle BAC$ का कोण समद्विभाजक है।
AD is angle bisector of $\angle$ BAC



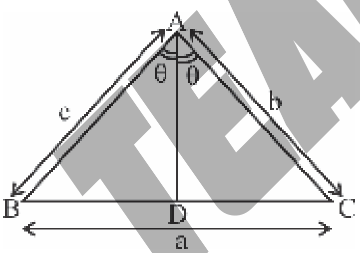
$$AD^2 = bc - mn$$

(iv) यदि $\angle$ BAD = $\angle$ CAD
तब AD, $\angle A$ का आन्तरिक समद्विभाजक होगा।



$$AD = \frac{2bc\cos\theta}{b+c}$$

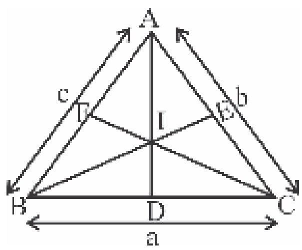
(7) (i)



$\therefore$ BD : DC = c : b

then $BD = a \times \frac{c}{b+c}$ and $CD = a \times \frac{b}{b+c}$

(ii)

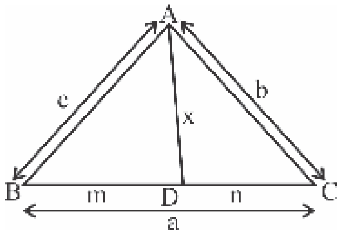


$AI : ID = (b + c) : a$

$BI : IE = (a + c) : b$

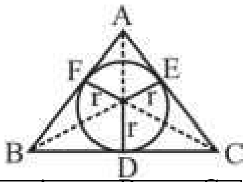
$CI : IF = (a + b) : c$

(8) Stewart Theorem (स्टीवर्ट प्रमेय):



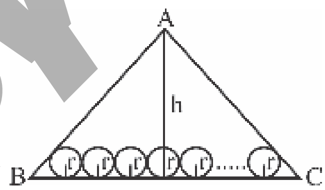
$$b^2m + c^2n = x^2a + mna$$

(9)



$$\Delta = r^2\left(\cot\frac{A}{2} + \cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2}\right)$$

(10)



$$r = \frac{\Delta}{S + (n-1)h}$$

where:

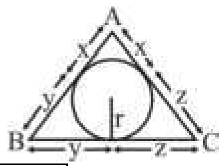
$\Delta \rightarrow \Delta ABC$ का क्षेत्रफल/area of ΔABC

$S \rightarrow \Delta ABC$ का अर्द्ध परिमाप/semi perimeter of ΔABC

$n \rightarrow$ वृत्तों की संख्या/no of circles

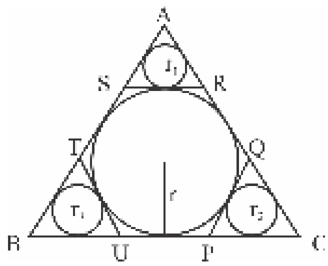
$h \rightarrow$ संगत ऊँचाई/corresponding height

(11)



$$r = \sqrt{\frac{xyz}{x+y+z}}$$

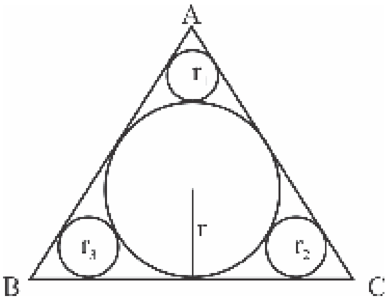
(12)



PQ||AB, SR||BC, TU||AC
तथा PQ, SR and TU (Tangents) स्पर्श रेखाऐं हैं

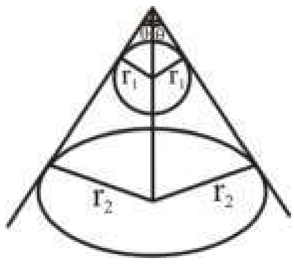
$$r = r_1 + r_2 + r_3$$

(13)



$$r = \sqrt{r_1 r_2} + \sqrt{r_2 r_3} + \sqrt{r_3 r_1}$$

(14)(i)

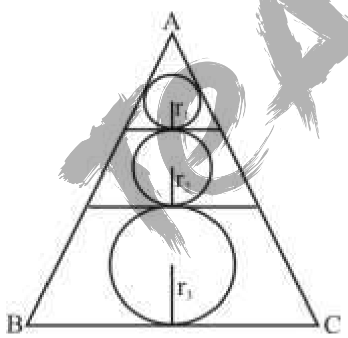


$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{1 - \sin\theta}{1 + \sin\theta}$$

(ii) यदि/If $\theta = 30^\circ$

$$\frac{r_1}{r} = \frac{1}{3}$$

(iii)



If ΔABC equilateral Triangle

यदि ΔABC एक समबाहु Δ है।

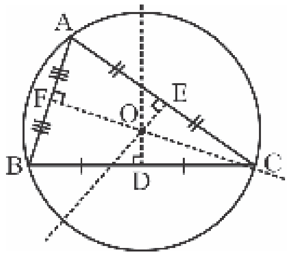
$r_1 : r_2 : r_3 = 1 : 3 : 9$

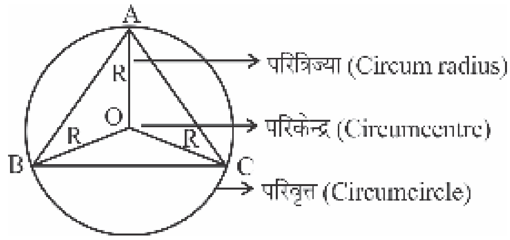
$A_1 : A_2 : A_3 = 1 : 9 : 81$

परिकेन्द्र (Circumcentre):

किसी त्रिभुज की भुजाओं के लम्ब समद्विभाजकों के प्रतिच्छेद बिन्दु को परिकेन्द्र कहते हैं।

The point of intersection of the perpendicular bisectors of the sides of a triangle is called the circumcentre.





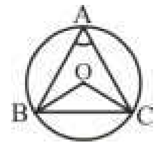
$$OA = OB = OC = R$$

(i) परिवृत्त के केन्द्र को परिकेन्द्र कहते हैं।
Centre of circumcircle is called circumcentre

(ii) परिवृत्त की त्रिज्या को परित्रिज्या कहा जाता है।
Radius of circumcircle is called circumradius.

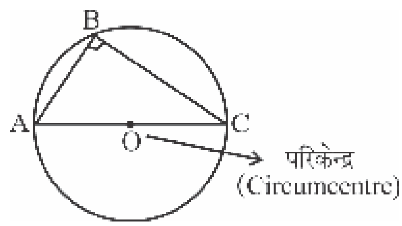
(iii) परिकेन्द्र तीनों शीर्षों से समदूरस्थ होते हैं।
Circumcentre is equidistant from all three vertex.

(2) वृत्त के किसी चाप द्वारा परिकेन्द्र पर बना कोण परिधि पर बने कोण का दुगुना होता है।
Angle subtends by arc of a circle at circumcentre is daubled the angle subtends by it at circumference.

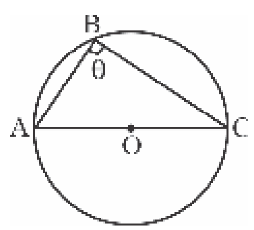


$$\angle BOC = 2\angle A$$

(3) (i)
समकोण त्रिभुज में परिकेन्द्र कर्ण का मध्य बिन्दु होता है।
In right angled triangle, the circumcentre is mid point of the hypotenuse.

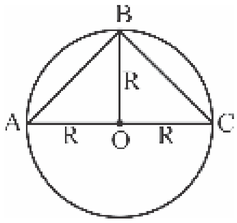


(ii) अर्धवृत्त पर बना कोण समकोण होता है।
The angle subtended on a semicircle is right Angle.



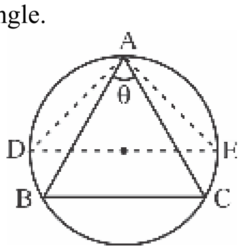
$$\theta = 90^\circ$$

(iii)



$OA = OB = OC = R$

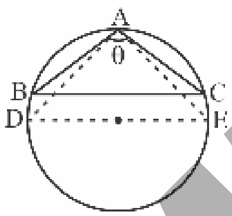
(4) न्यूनकोण Δ में, परिकेन्द्र त्रिभुज के अन्दर स्थित होता है।
In acute angle triangle, circumcentre lies inside the triangle.



$\because \angle DAE = 90^\circ$ (अर्द्धवृत्त पर बना कोण)

$\therefore$ **$\theta < 90^\circ$ (ΔBAC न्यून कोण त्रिभुज)**

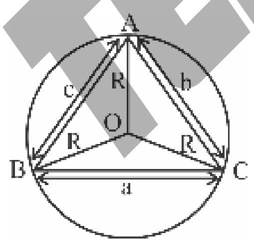
(5) अधिककोण Δ में, परिकेन्द्र त्रिभुज के बाहर स्थित होता है।
In obtuse angle triangle, circumcentre lies outside the triangle.



$\because \angle DAE = 90^\circ$ (अर्द्धवृत्त पर बना कोण)

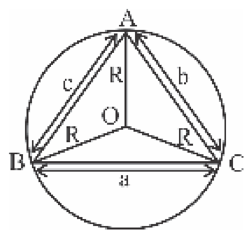
$\therefore$ **$\theta > 90^\circ$ (ΔBAC अधिक कोण त्रिभुज)**

(6) (i)



$$R = \frac{a}{2\sin A} = \frac{b}{2\sin B} = \frac{c}{2\sin C}$$

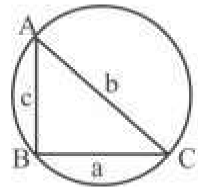
(ii)



$$R = \frac{abc}{4\Delta}$$

$\{\Delta \rightarrow$ त्रिभुज का क्षेत्रफल (Area of triangle)$\}$

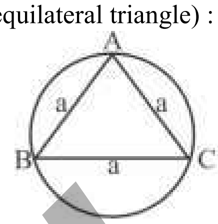
(iii) समकोण त्रिभुज में परित्रिज्या (Circumradius of right angled triangle) :



$$R = \frac{\text{कर्ण (Hypotenuse)}}{2}$$

$$R = \frac{b}{2}$$

(iv) समबाहु त्रिभुज में परित्रिज्या (Circumradius of equilateral triangle) :

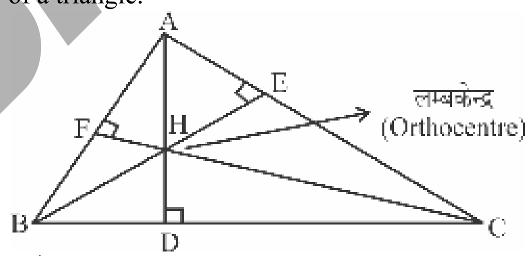


$$R = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

लम्ब केन्द्र (Orthocentre)

''त्रिभुज के तीनों शीर्ष लम्बों के प्रतिच्छेद बिन्दु को लम्ब केन्द्र कहते हैं।''

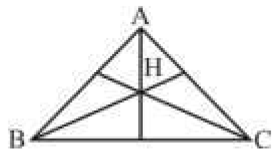
"Orthocentre is the intersection of all three altitudes of a triangle."



जहाँ/Where, $AD \perp BC$
$BE \perp AC$
$CF \perp AB$

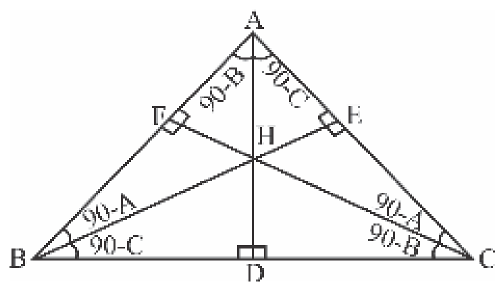
विशेषताऐं (Properties):

(1)



$\angle BHC = 180 - \angle A$
$\angle AHC = 180 - \angle B$
$\angle AHB = 180 - \angle C$

(2) **समरूप त्रिभुजों के जोड़े, जब सभी लम्बों को खींचा जाए-**
Pairs of similar triangles when all perpendiculars are drawn :



TEAM SPY

समरूपता से/From similarity,

$\Delta CHE \sim \Delta BHF$

$\Delta CHD \sim \Delta AHF$

$\Delta BHD \sim \Delta AHE$

समझें: (Understand)

$\Delta\ CHE \sim \Delta BHF$

$$\frac{HE}{HF} = \frac{HC}{HB}$$

$\therefore$ $\boxed{HB \times HE = HF \times HC}$

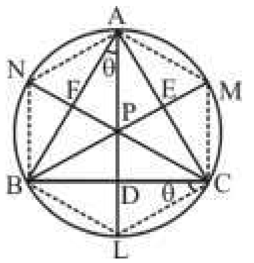
इसी प्रकार/Similarly,

$\boxed{HB \times HE = HF \times HC}$

$\boxed{HA \times HD = HF \times HC}$

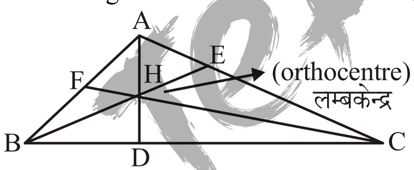
$\boxed{HA \times HD = HB \times HD}$

3. समान आधार पर एक ही वृत्त खण्ड के कोण बराबर होते है।
The angles of same segment of a circle on the same base are equal.

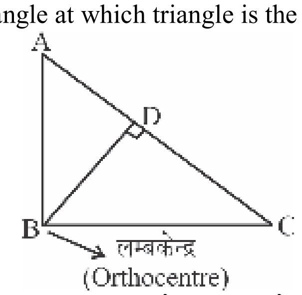


Base (आधार)BL: $\boxed{\angle BAL = \angle BCL}$ (Similarly others)

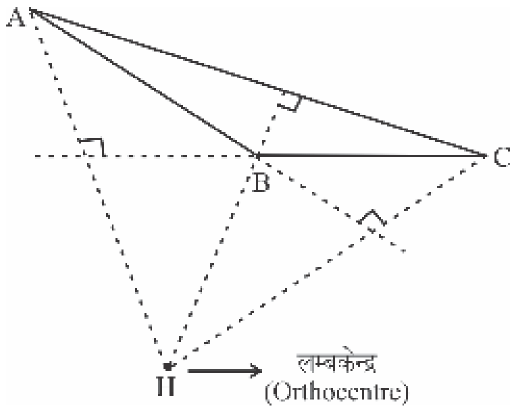
4. (i) न्यूनकोण Δ में लम्बकेन्द्र, त्रिभुज के अन्दर स्थित होता है।
The orthocentre of an acute - angled triangle lies inside the triangle.



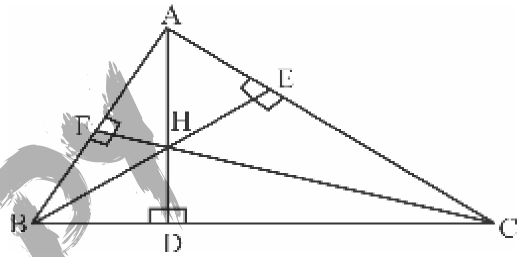
(ii) एक समकोण त्रिभुज में लम्बकेन्द्र समकोण बनाने वाले त्रिभुज के शीर्ष पर स्थित होता है।
In right angled triangle, the orthocentre on the vertex of the triangle at which triangle is the right angled.



(iii) अधिक कोण त्रिभुज में, लम्बकेन्द्र त्रिभुज के बाहर और अधिक कोण के पीछे की ओर होता है।
In an obtuse angled triangle the orthocentre is out side of the triangle and will be at the back of the angle which is obtuse.

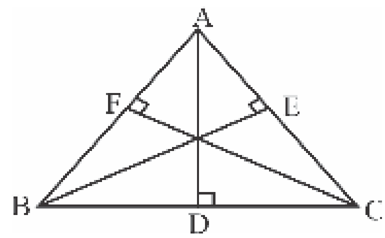


(iv) त्रिभुज के लम्बकेन्द्र (Orthocentre of triangles):



Triangle	Orthocentre
Δ ABC	H
Δ BHC	A
Δ CHA	B
Δ AHB	C

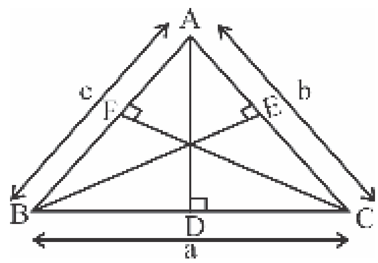
5.



$\therefore$ AD < AB, BE < BC, CF < AC

तब/then, $\boxed{(AD + BE + CF) < (AB + BC + CF)}$

6.

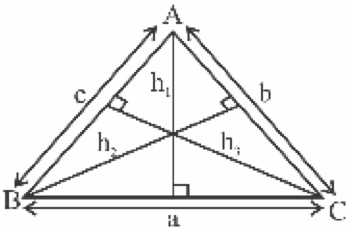


$$BD = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2a},\ CD = \frac{b^2 + a^2 - c^2}{2a}$$

$\boxed{BD : CD = (c^2 + a^2 - b^2) : (b^2 + a^2 - c^2)}$

7. (i) त्रिभुज की ऊँचाईयों (शीर्षलम्बों) और भुजाओं के बीच समबन्धः (Relation between height & sides of triangle):

$$\therefore \Delta = \frac{1}{2}a\times h_1 = \frac{1}{2}b\times h_2 = \frac{1}{3}c\times h_3$$



$$\therefore h_1 : h_2 : h_3 = \frac{1}{a}:\frac{1}{b}:\frac{1}{c}$$

OR

$$a : b : c = \frac{1}{h_1}:\frac{1}{h_2}:\frac{1}{h_3}$$

(ii) त्रिभुज के शीर्षलम्बों की असमिका (Inequality of altitudes of triangle) :

$$\frac{h_1h_2}{|h_1+h_2|} < h_3 < \frac{h_1h_2}{|h_1-h_2|}$$

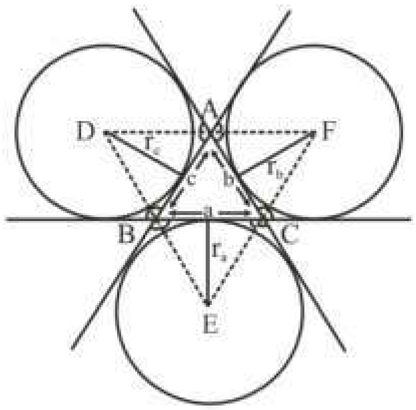
(iii) त्रिभुज का क्षेत्रफल, जब शीर्षलम्बों की लम्बाई दी गयी हो (Area of triangle, when given the length of altitudes):

$$\frac{1}{\Delta} = \sqrt{\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3} \quad -\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3} \quad \frac{1}{h_1}-\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3} \quad \frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}-\frac{1}{h_3}}$$

बाह्यकेन्द्र (Excentre)

एक कोण के आन्तरिक समद्विभाजक तथा अन्य दो बाह्य विपरीत कोणों के समद्विभाजकों के प्रतिच्छेद बिन्दु को बाह्यकेन्द्र कहते हैं।

The intersection point of internal angle bisector of one angle and bisectors of other two opposite exterior angles-



(i) बाह्य त्रिज्या (ex-radius)

$$r_a = \frac{\Delta}{s-a} \quad r_b = \frac{\Delta}{s-b} \quad r_c = \frac{\Delta}{s-c}$$

(ii) $r_a = \sqrt{\frac{s(s-b)(s-c)}{s-a}}$

(iii) $\Delta = \sqrt{r.r_a.r_b.r_c}$

(iv) $r_a + r_b + r_c = 4R + r$

(v) $r_ar_b + r_br_c + r_cr_a = s^2$

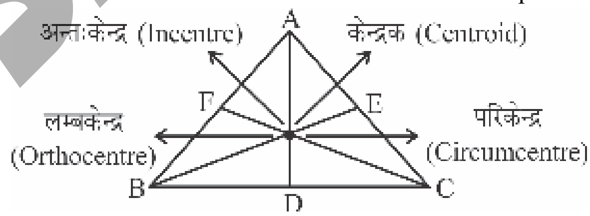
(vi) $r_a^2 + r_b^2 + r_c^2 = (4R + r)^2 - 2s^2$

(vii) $\angle BIC = 90 - \frac{\angle A}{2}$

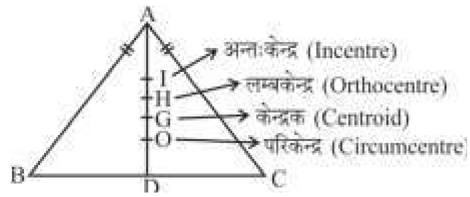
त्रिभुज के केन्द्रों के मिश्रित गुण
Mixed Properties of centres of triangle

1. समबाहु त्रिभुज में, केन्द्रक, अन्तःकेन्द्र, परिकेन्द्र और लम्बकेन्द्र एक ही बिन्दु पर होते हैं।

In equilateral triangle, centroid, incentre, circumcentre and orthocentre lie at the same point.

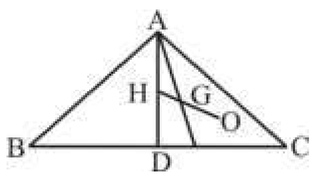


2. समद्विबाहु त्रिभुज में, अन्तःकेन्द्र, लम्बकेन्द्र, केन्द्रक तथा परिकेन्द्र एक ही रेखा पर होते हैः (In Isosceles triangle, Incentre, orthocentre centroid and circumcentre lie at the same line.



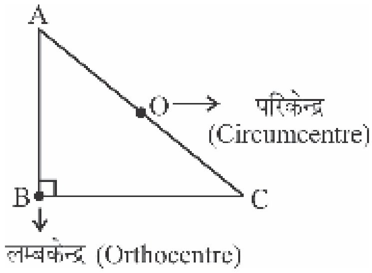
3. **यूलर की रेखाः (Euler's line):** किसी भी त्रिभुज में लम्बकेन्द्र (H), केन्द्रक (G) तथा परिकेन्द्र (O) हमेशा एक सीधी रेखा में होंगे/ In any triangle orthocentre (H), centroid (G) and circumcentre (O) always in a straight line, the ratio,

तब/then, HG : GO = 2 : 1

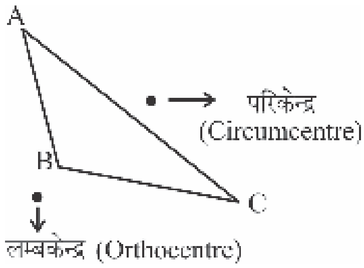


TEAM SPY

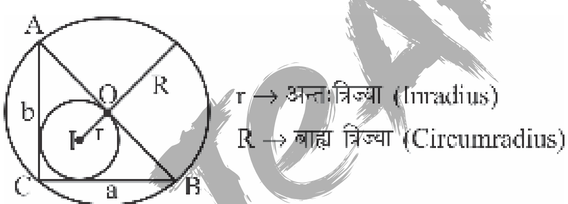
4. एक समकोण त्रिभुज का लम्बकेन्द्र समकोण शीर्ष पर होता है। जबकि परिकेन्द्र कर्ण का मध्य बिन्दु होता है।
The orthocentre of a right angled triangle lies at the right angled vertex while its circumcentre is mid point of hypotenure.



5. अधिककोण त्रिभुज के परिकेन्द्र तथा लम्बकेन्द्र त्रिभुज के बाहर स्थित होते हैं।
Circumcentre and orthcentre of an obtuse angled triangle always lie out side the triangle.

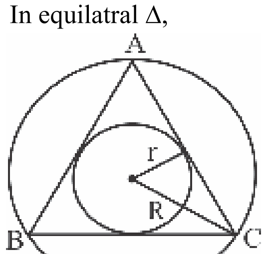


6. समकोण Δ में, (In right Angled D):
$\boxed{2(R + r) = a + b}$



7. किसी भी त्रिभुज के अन्तः केन्द्र तथा परिकेन्द्र के बीच की दूरी $\sqrt{R^2 - 2Rr}$ होती है।
The distance between incentre and circumcentre of a triangle is $\sqrt{R^2 - 2Rr}$.

8. समबाहु Δ में, In equilatral Δ,

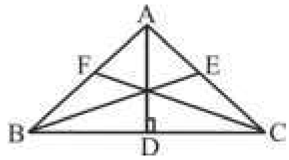


$\boxed{R = 2r}$

9. **सेवियन (Cevian) :** कोई भी यादृच्छिक रेखा जो शीर्ष को विपरीत भुजा से जोड़ती है।/Any randome line which joins vertex to opposite side.

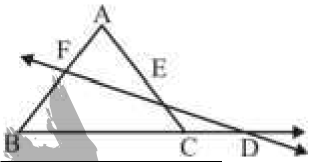
सीवा की प्रमेय (Ceva's Theorem):

$$\boxed{\frac{BD}{DC} \times \frac{CE}{EA} \times \frac{AF}{FB} = 1}$$



"सीवा प्रमेय Δ के अन्दर स्थित किसी भी बिन्दु के लिये सत्य है।"
"Ceva's theorem is true for any point inside the triangle."

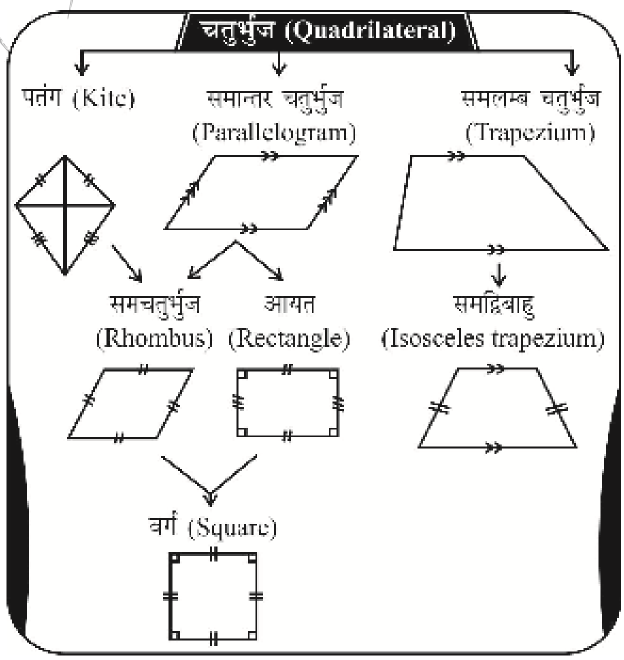
10. **मैनेलास प्रमेय (Menelaus' theorem):**



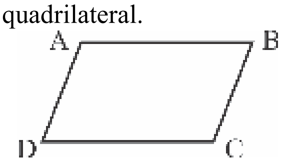
$$\boxed{\frac{BD}{DC} \times \frac{CE}{EA} \times \frac{AF}{FB} = -1}$$

चतुर्भुज (Quadrilateral)

प्रवाह आरेख (Flow Chart)

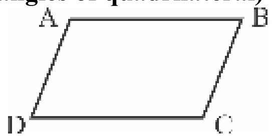


चतुर्भुज (Quadrilateral) : चार भुजाओं से बन्द आकृति को चतुर्भुज कहते हैं/A closed figure with four sides is called a quadrilateral.



विशेषताऐं (Properties):

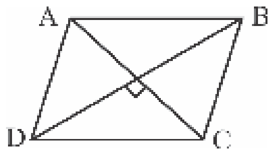
1. चतुर्भुज के अन्तः कोणों का योगफल (Sum of interior angles of quadrilateral) :



$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^\circ$

2. यदि किसी चतुर्भुज के विकर्ण एक दूसरे को 90° पर प्रतिच्छेद करे, If diagonals of the quadrilateral intersect each other at 90°

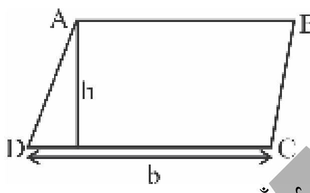
तब/then,



$AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$

3. चतुर्भुज का क्षेत्रफल (Area of Quadrilateral) :

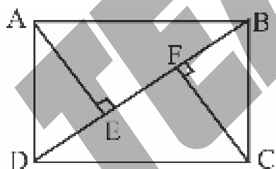
(i)



क्षेत्रफल (Area) = आधार (base) × ऊँचाई (height)

$A = b \times h$

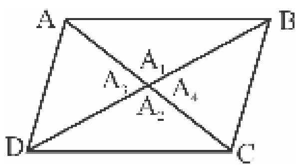
(ii)



Area of □ ABCD $= \frac{1}{2} \times BD \times (AE + CF)$

(iii) यदि ABCD कोई चतुर्भुज है, तथा A_1, A_2, A_3 तथा A_4 क्षेत्रफल है/ If ABCD is any quadrilateral and A_1, A_2, A_3 and A_4 are areas.

तब/then,

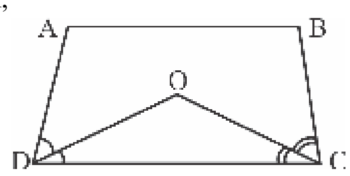


$A_1 \times A_2 = A_3 \times A_4$

4.

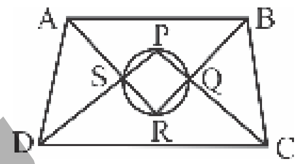
(i) यदि DO तथा CO क्रमशः $\angle D$ तथा $\angle C$ के कोण समद्विभाजक हो/ If DO and CO are the angle bisectors of $\angle D$ and $\angle C$ respectively.

तब/then,



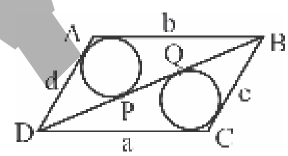
$\angle COD = \frac{1}{2}(\angle A + \angle B)$

(ii) किसी चतुर्भुज के कोण समद्विभाजकों द्वारा बना चतुर्भुज चक्रीय चतुर्भुज होगा/Quadrilateral formed by angle bisectors of a quadrilateral will always be cyclic quadrilateral.



$\angle P + \angle R = 180$ & $\angle S + \angle Q = 180$

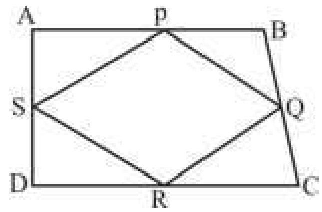
5.



$PQ = \frac{(a+b)-(c+d)}{2}$

6. यदि ABCD एक चतुर्भुज है तथा P, Q, R तथा S चतुर्भुज की भुजाओं के मध्य बिन्दु है/If ABCD is a quadrilateral and P, Q, R and S are the mid points of sides of quadrilateral.

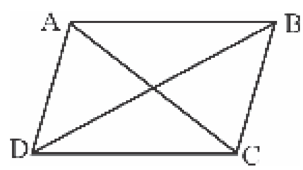
तब/then,



(i) PQRS एक समान्तर चतुर्भुज होगा/PQRS is a parallelogram.

(ii) Area of □ PQRS $= \frac{1}{2}$ Area of □ABCD

7. किसी चतुर्भुज का परिमाप उसके विकर्णों के योग से बड़ा होता है।/The perimeter of a quadrilateral is greater than the sum of its diagonals.



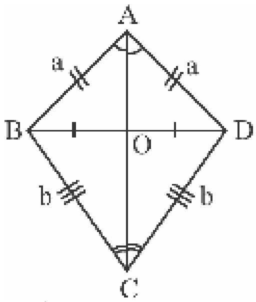
$AB + BC + CD + DA > AC + BD$

TEAM SPY

पतंग (Kite)

■ ऐसा चतुर्भुज जिसमें समान और आसन्न भुजाओं के दो युग्म होते हैं पतंग कहलाती है।/A quadrilateral having equal and adgacent sides in two pairs in called kite.

1. (i) AB = AD = a
BC = CD = b :
(ii) $\angle B = \angle D$
$\angle A \neq \angle C$



2. AC → बड़ा विकर्ण/larger diagonal (d_1)
BD → छोटा विकर्ण/Smaller diagonal (d_2)

3. परिमाप (Perimeter) : P = 2(a + b)

4. क्षेत्रफल (Area) = $\frac{1}{2} \times d_1 \times d_2$

5. विकर्ण समकोण पर प्रतिच्छेदित करते हैं।
The diagonals intersect at right angle.
$AC \perp BD$

6. बड़ा विकर्ण छोटे विकर्ण को समद्विभाजित करता है।
The larger diagonal bisects the smaller diagonal.
BO = OD

7. बड़ा विकर्ण अपने कोणों को दो बराबर भागों में बॉटता है। The larger diagonal bisects its angles into two equal partes.
$\angle BAO = \angle DAO$ & $\angle BCO = \angle DCO$

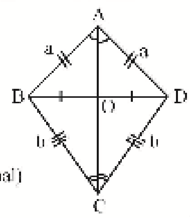
पतंग के विकर्ण (Diagonals of Kite)

→ **विकर्णों की लम्बाई (Length of diagonals)**
(No) $AC \neq BD$

→ **लम्बवत् (Perpendicular)**
(Yes) $AC \perp BD$

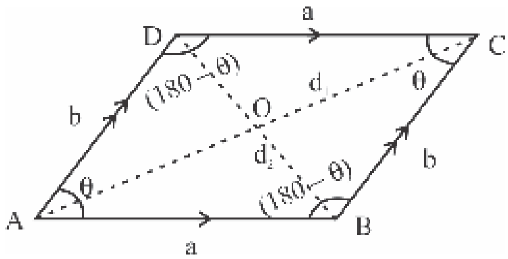
→ **भुजा समद्विभाजक (Bisect each other)**
(No) (But larger diagonal bisects the small diagonal)
OB = OD but $AO \neq OC$

→ **कोण समद्विभाजक (Angle bisector)**
(No) (But the larger diagonal bisects its into two equal parts)
$\angle BAO = \angle DAO$, $\angle BCO = \angle DCO$



समान्तर चतुर्भुज (Parallelogram)

■ ऐसा चतुर्भुज, जिसकी विपरीत भुजाऐ समान्तर एवं बराबर हो समान्तर चतुर्भुज कहलाता है।/A quadrilateral which opposite sides are parallel and equal is called a parallelogram.

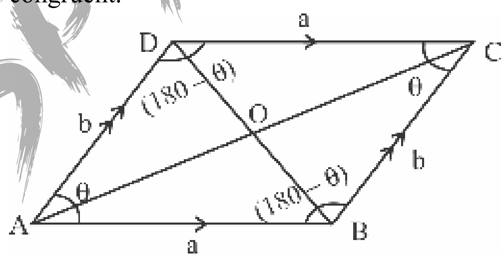


1. (i) AB || DC & AD || BC
(ii) AB = DC & AD = BC
(iii) AC = d_1 BD = d_2

2. सम्मुख कोण बराबर होते है।
Opposite angles are equal.
$\angle A = \angle C$ & $\angle B = \angle D$

3. दो आसन्न कोणों का योग 180° होता है।
Sum of two adjacent angles 180°.
$\angle A + \angle B = 180^o$, $\angle B + \angle C = 180^o$
$\angle C + \angle D = 180^o$, $\angle A + \angle D = 180^o$

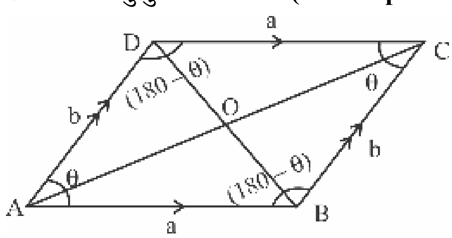
4. विपरीत त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं/Opposite triangles are congruent.



$\Delta ABC \cong \Delta ADC$ & $\Delta DAB \cong \Delta DCB$

5. सभी चार त्रिभुजों का क्षेत्रफल बराबर होता है।
Area of all four triangles is equal.
Ar ΔAOB = Ar ΔBOC = Ar ΔCOD =
Ar ΔDOA = $\frac{1}{4}$ Ar □ ABCD

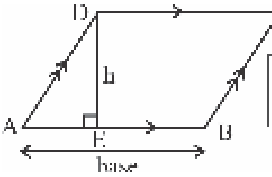
6. **सामान्तर चतुर्भुज का नियम (Law of parallelogram) :**



ΔABC में, कोज्या नियम (Co-sine rule) से–
$d_1^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(180 - \theta)$
$d_1^2 = a^2 + b^2 - 2ab(-\cos\theta)$
$d_1^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\theta$ .....(i)
ΔBAD में, कोज्या नियम (Co-sine rule) से–
$d_2^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$ ......(ii)
From eq^n (i) & (ii)
$$d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$$

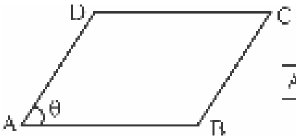
7.

(i)



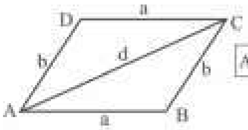
क्षेत्रफल ▱ ABCD = आधार × ऊँचाई
Area ▱ ABCD = Base × Height

(ii)



Area ▱ ABCD = AB × AD sin θ

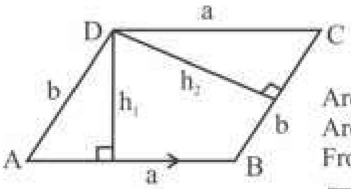
(iii)



Area ▱ABCD = $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-d)}$

$\left\{\text{Where, } s = \frac{a+b+d}{2}\right\}$

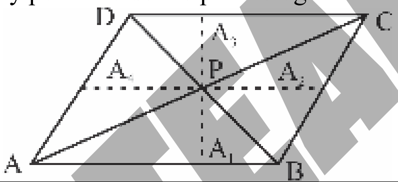
(iv)



Area = a × h_1 .....(i)
Area = b × h_2 .....(ii)
From eq^n (i) & (ii)

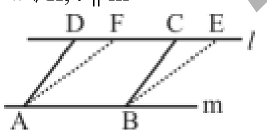
$a \times h_1 = b \times h_2$

(v) समान्तर चतुर्भुज के अन्दर कोई बिन्दु P हो-
P is any point inside the parallelogram-



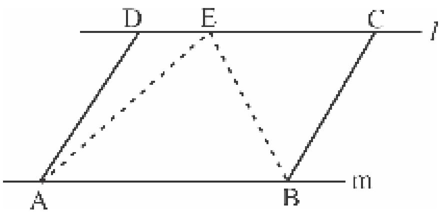
$(A_1 + A_3) = (A_2 + A_4) = \frac{1}{2} \times$Area ||gm ABCD

(vi) यदि/If, $l \parallel m$



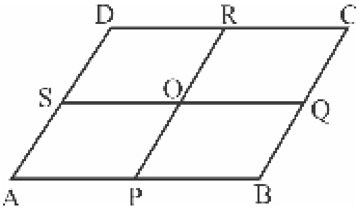
Area ||gm ABCD = Area ||gm ABEF

(vii)



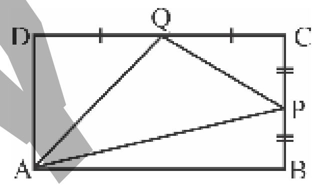
Area Δ ABE $= \frac{1}{2} \times$ ||gm ABCD

(viii) यदि P, Q, R और S भुजाओं के मध्य बिन्दु हो/If P, Q, R and S are the mid points of sides.
तब/then,



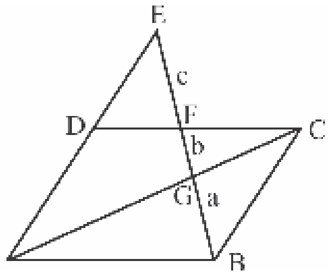
Area▱ APOS = Area▱ POQB = Area▱ QORC
= Area▱ ROSD = $\frac{1}{4}$ Area▱ ABCD

(ix)



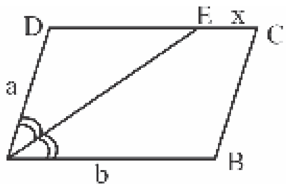
$\frac{\text{Area }\Delta APQ}{\text{Area}\parallel\text{gmABCD}} = \frac{3}{8}$

(x) यदि ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है/If ABCD is a parallelogram, BG = a, GF = b FE = C
तब/then,



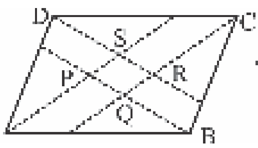
$a^2 = b^2 + bc$

(xi) यदि AE, ∠BAD का कोण समद्विभाजक है/If AE is the angle bisector of ∠ BAD, EC = x



x = b − a

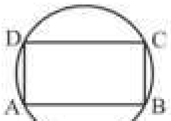
8. चारों कोणों के समद्विभाजक आयत बनाते हैं।
Bisectors of the four angles enclose a rectangle



▱ ABCD → समान्तर चतुर्भुज (Parallelogram)
□ PQRS → आयत (Rectangle)

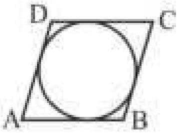
TEAM SPY

9. वृत्त के अन्दर बना हुआ समान्तर चतुर्भुज हमेशा आयत होता है।/A parallelogram inscribed in a circle is always a rectangle.



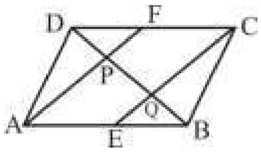
□ABCD → आयत (Rectangle)

10. वृत्त के परितः बना समान्तर चतुर्भुज हमेशा समचतुर्भुज होता है। A parallelogram circumscribed about a circle is always a rhombus.



ABCD → समचतुर्भुज (Rhombus)

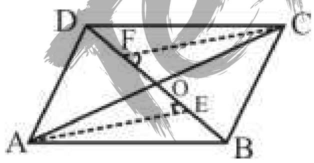
11. ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है E तथा F क्रमशः भुजा AB तथा CD के मध्य बिन्दु हो/ ABCD is a parallelogram, E and F are the mid points of AB and CD respectively, तब/then,



(i) DP = PQ = QB
(ii) AF || EC
(iii) ΔADF ≅ ΔCBE

12. ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है जिसके विकर्ण AC और BD, O पर प्रतिच्छेद करते हैं AE और CF, BD पर लम्ब है/ ABCD is a parallelogram in which diagonals AC and BD intersect at O. AE and CF are perpendicular on BD at E and F respectively,

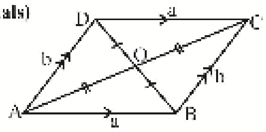
CGL Tier-I 6-June 2019



तब/then,
(i) ΔADC ≅ ΔCBA
(ii) ΔAOE ≅ ΔCOF
(iii) ΔABD ≅ ΔCDB
(iv) ΔAEB ≅ ΔCFD

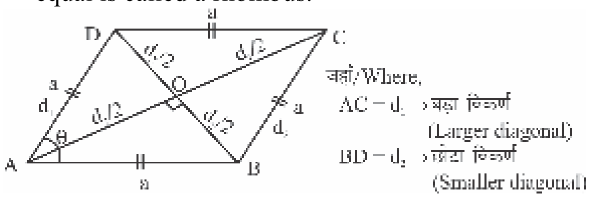
समान्तर चतुर्भुज के विकर्ण (Diagonals of parallelogram)

→ विकर्णों की लम्बाई (Length of diagonals)
(No) AC ≠ BD
→ लम्बवत् (Perpendicular)
(No) AC is not ⊥ BD
→ भुजा समद्विभाजक (Bisect each other)
(Yes) OA = OC & OB = OD
→ कोण समद्विभाजक (Angle bisector)
(No)
∠BAO ≠ ∠DAO, ∠BCO ≠ ∠DCO
∠ADO ≠ ∠CDO, ∠ABO ≠ ∠CBO



समचतुर्भुज (Rhombus)

■ ऐसा समान्तर चतुर्भुज जिसकी चारो भुजाऐ बराबर हो समचतुर्भुज कहलाता है।/A parallelogram which all four sides are equal is called a rhombus.



AB = BC = CD = DA = a

1. समचतुर्भुज के विकर्ण एक दूसरे को समकोण पर समद्विभाजित करते है।/The diagonals of a rhombus bisect each other at right angled.

2. $d_1^2 + d_2^2 = 4a^2$

3. (i) $\text{Area} = \frac{1}{2} \times d_1 \times d_2$

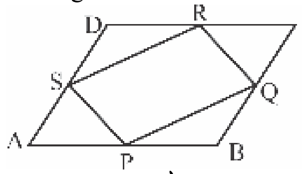
(ii) $\text{Area} = a^2 \sin\theta$

4. समचतुर्भुज की ऊँचाई/Hight of rhombus

$$H = \frac{d_1 d_2}{\sqrt{d_1^2 + d_2^2}}$$

5. Perimeter परिमाप $P = 4a$

6. समचतुर्भुज की भुजाओ के मध्य बिन्दुओ को मिलाने से बनी आकृति आयत होती है।/Figure formed by joining the mid-points of the adjacent sides of a rhombus is rectangle.

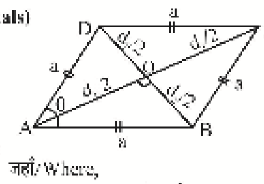


ABCD → समचतुर्भुज (rhombus)

यदि P, Q, R और S, AB, BC, CD तथा AD के क्रमशः मध्य बिन्दु हैं।
If P, Q, R and S are the mid point of AB, BC, CD and AD respectively
अतः PQRS एक आयत है।
Therefore PQRS is a rectangle.

समचतुर्भुज के विकर्ण (Diagonals of rhombus)

→ विकर्णों की लम्बाई (Length of diagonals)
(No) AC ≠ BD
→ लम्बवत् (Perpendicular)
(Yes) AC ⊥ BD
→ भुजा समद्विभाजक (Bisect each other)
(Yes) OA = OC & OB = OD
→ कोण समद्विभाजक (Angle bisector)
(Yes)
∠BAO = ∠DAO, ∠BCO = ∠DCO
∠ADO ∠CDO, ∠ABO ∠CBO

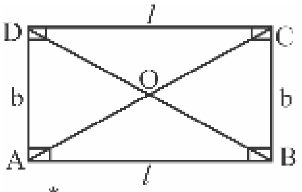


जहाँ/Where,
AC = d → बड़ा विकर्ण
(Larger diagonal)
BD = d → छोटा विकर्ण
(Smaller diagonal)

आयत (Rectangle)

■ ऐसा समान्तर चतुर्भुज जिसका प्रत्येक कोण 90° हो, आयत कहलाता है।

A parallelogram which each angle is 90° is called rectangle.



जहाँ/Where,
AC = BD = d → विकर्ण (diagonal)

$\boxed{\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90^\circ}$

1. परिमाप (Perimeter) $\boxed{P = 2(l + b)}$
2. क्षेत्रफल (Area) $\boxed{A = l + b}$
3. (i) विकर्ण (Diagonal) $\boxed{d = \sqrt{l^2 + b^2}}$

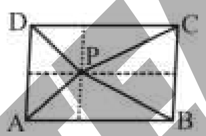
(ii) विकर्ण बराबर तथा एक-दूसरे को समद्विभाजित करते हैं परन्तु समकोण पर नहीं।

Diagonals are equal and bisect each other but not at right angled.

4.

(i) यदि P आयत/वर्ग के अन्दर कोई बिन्दु हो/If P is any point in side the rectangle/square.

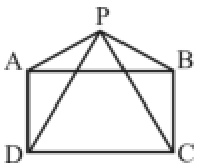
तब/then,



$\boxed{PA^2 + PC^2 = PB^2 + PD^2}$

(ii) यदि P आयत/वर्ग के बाहर कोई बिन्दु हो/If P is any point out side the rectangle/square

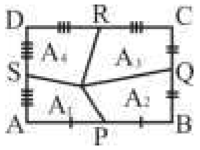
तब/then,



$\boxed{PA^2 + PC^2 = PB^2 + PD^2}$

5. ABCD एक आयत/वर्ग है तथा P, Q, R तथा S संबंधित भुजाओं के मध्य बिन्दु है।

ABCD is a rectangle/square and P,Q,R and S are mid points of respective sides.



$\boxed{(A_1 + A_3) = (A_2 + A_4) = \frac{1}{2} \times \square \text{ ABCD Area}}$

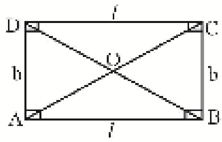
आयत के विकर्ण (Diagonals of rectangle)

→ विकर्णों की लम्बाई (Length of diagonals)
(Yes) AC = BD

→ लम्बवत् (Perpendicular)
(No) AC is not ⊥ BD

→ भुजा समद्विभाजक (Bisect each other)
(Yes) OA = OC & OB = OD

→ कोण समद्विभाजक (Angle bisector)
(No)
∠BAO ≠ ∠DAO, ∠BCO ≠ ∠DCO
∠ADO ≠ ∠CDO, ∠ABO ≠ ∠CBO

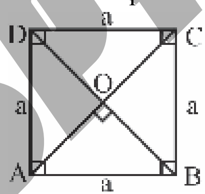


जहाँ/Where,
AC = BD = d → विकर्ण (diagonal)

वर्ग (Square)

■ ऐसा समान्तर चतुर्भुज जिसके सभी चारों कोण और चारों भुजाएं आपस में बराबर हो, वर्ग कहलाता है।

Such a parallelogram which all four angles and four sides are equal each other is called a square.



जहाँ/Where,
AC = BD = d → विकर्ण (diagonal)

1. (i) ∠A = ∠B = ∠C = ∠D = 90°

(ii) AB = BC = CD = AD = a

2. (i) विकर्ण बराबर एवं एक-दूसरे को समकोण पर समद्विभाजित करते हैं।

Diagonals are equal and bisect each other at right angled.

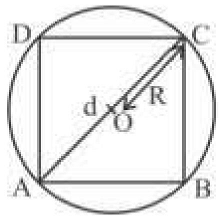
(ii) $\boxed{d = a\sqrt{2}}$

3. परिमाप (perimeter) $\boxed{P = 4a}$

4. (i) $\boxed{\text{क्षेत्रफल (Area)} = a^2}$

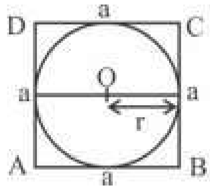
(ii) $\boxed{A = \frac{d^2}{\sqrt{2}}}$

4. (i)



$\boxed{R = \frac{d}{2}}$

(ii)



$\boxed{r = \frac{a}{2}}$

TEAM SPY

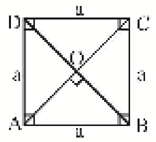
वर्ग के विकर्ण (Diagonals of square)

→ विकर्णों की लम्बाई (Length of diagonals)
(Yes) AC = BD

→ लम्बवत् (Perpendicular)
(Yes) AC ⊥ BD

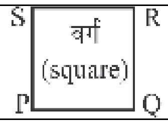
→ भुजा समद्विभाजक (Bisect each other)
(Yes) OA = OC & OB = OD

→ कोण समद्विभाजक (Angle bisector)
(Yes)
∠BAO = ∠DAO, ∠BCO = ∠DCO
∠ADO = ∠CDO, ∠ABO = ∠CBO



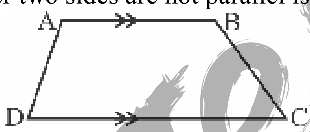
जहाँ/Where,
AC = BD = d → विकर्ण (diagonal)

आयत और वर्गों के परिमाप और क्षेत्रफलों की असमिका (Enequality of perimeter and areas of rectangle and square) :

	
परिमाप (Perimeter) = P_1 क्षेत्रफल (Area) = A_1	परिमाप (Perimeter) = P_2 क्षेत्रफल (Area) = A_2
☞ यदि/If $P_1 = P_2$ तब/then $A_1 < A_2$ ☞ यदि/If $A_1 = A_2$ तब/then $P_1 > P_2$	

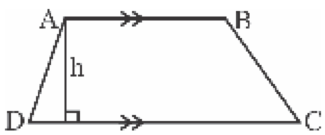
समलम्ब चतुर्भुज (Trapezium)

■ ऐसा चतुर्भुज जिसकी दो भुजाएं समान्तर हो तथा अन्य दो भुजाऐ समान्तर न हो समलम्ब चतुर्भुज कहलाता है।
A quadrilateral which two sides are parallel and the other two sides are not parallel is called a trapezium.

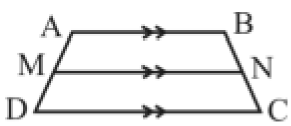


➢ Area (क्षेत्रफल) $\frac{1}{2}$ ×(sum of parallel sides × height)

$A = \frac{1}{2} \times (AB + DC) \times h$

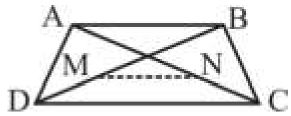


➢ यदि M और N, भुजा AD और BC के क्रमशः मध्यबिन्दु हैं/If M and N are the mid points of sides AD and BC respectively,
तब/then,



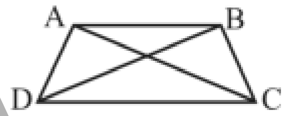
$$MN = \frac{1}{2}(AB + DC)$$

➢ यदि M और N, विकर्ण BD और AC के क्रमशः मध्यबिन्दु हैं/If M and N are the mid points of diagonals BD and AC respectively,
तब/then,



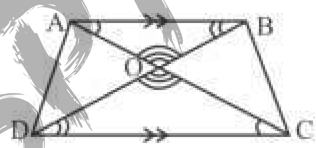
$$MN = \frac{1}{2}(DC - AB)$$

➢ भुजाओं और विकर्णों में सम्बन्ध (Relation between sides & diagonal)



$$AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2 + 2 \times AB \times CD$$

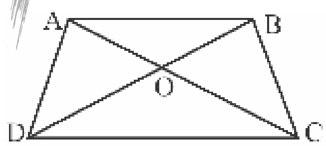
➢



$\because \Delta AOB \sim \Delta COD$

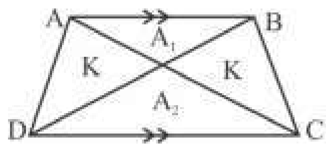
$\therefore \frac{AO}{OC} = \frac{BO}{OD} = \frac{AB}{DC}$

➢



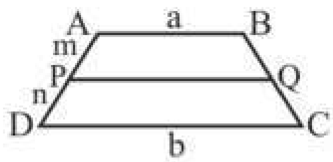
Area of AOD = Area of BOC

➢



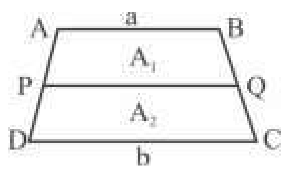
$K = \sqrt{A_1A_2}$

➢



$PQ = \frac{an + bm}{n + m}$

➢



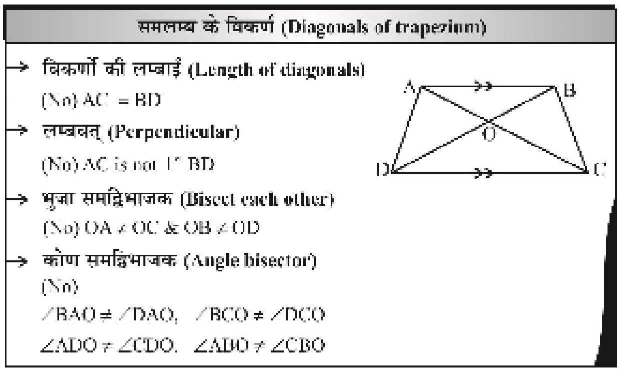
$\frac{\text{Area} \square \text{ABQP}}{\text{Area} \square \text{PQCD}} = \frac{A_1}{A_2}$

➢ $PQ = \sqrt{\frac{A_1b^2 + A_2a^2}{A_1 + A_2}}$

➢ यदि/If $A_1 = A_2$

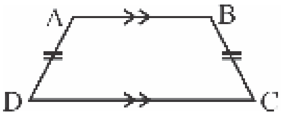
तब/then,

$$PQ = \sqrt{\frac{b^2 + a^2}{2}}$$



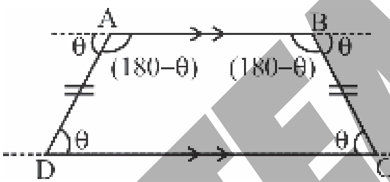
समद्विबाहु समलम्ब (Isosceles Trapezium)

■ ऐसा समलम्ब चतुर्भुज जिसकी असमान्तर भुजाऐ बराबर हो समद्विबाहु समलम्ब कहलाता है।
A trapezium which non-parallel sides are equal is called an isosceles trapezium.



AB || DC & AD = BC

➢

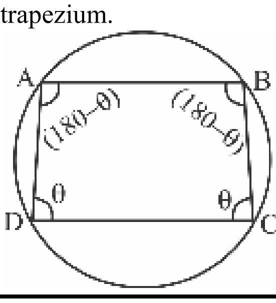


$\angle D = \angle C$, $\angle A = \angle B$
AB || DC & AD = BC
तब/then,
$\angle A + \angle C = 180^o$ & $\angle B + \angle D = 180^o$
$\angle A + \angle D = 180^o$ & $\angle B + \angle C = 180^o$

➢ प्रत्येक समद्विबाहु समलम्ब चतुर्भुज एक चक्रीय चतुर्भुज होता है।
Each isosceles trapezium is a cyclic quadrilateral.

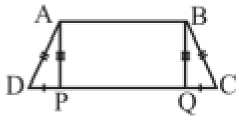
अथवा/or

यदि एक समलम्ब वृत्त में बना हुआ तो यह समद्विबाहु समलम्ब होगा।/If a trapezium is inscribed in a circle it must be a isosceles trapezium.



☞ चक्रीय चतुर्भुज में, आमने-सामने के कोणों का योग 180^o होता है।
In cyclic quadrilateral, the sum of the opposite angle is 180^o.
$\angle A + \angle C = 180^o$ & $\angle B + \angle D = 180^o$

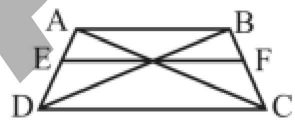
➢



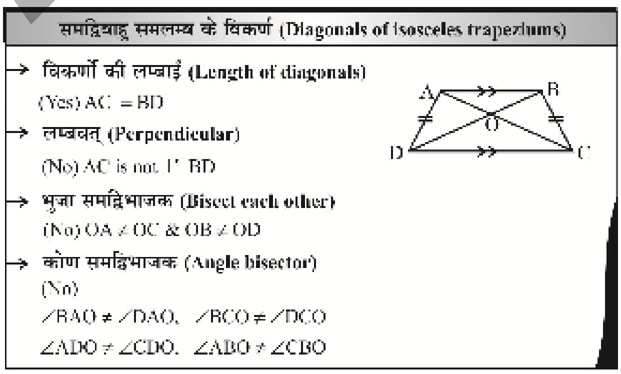
$\Delta APD \cong \Delta BQC$

$$DP = QC = \frac{DC - AB}{2}$$

➢ समद्विबाहु समलम्ब चतुर्भुज के विकर्णों के प्रतिच्छेद से होकर गुजरने वाले समान्तर रेखा खण्ड (EF) की लम्बाई :
The length of a parallel line segment (EF) through the intersection of diagonals of the isosceles trapezium is :



$$EF = \frac{2.AB.CD}{AB + CD}$$



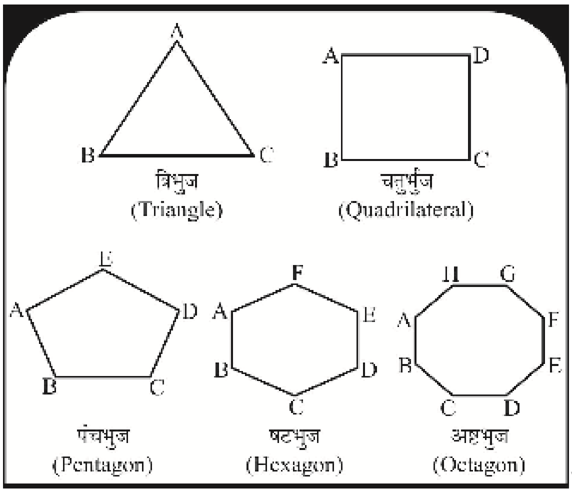
चतुर्भुज के मध्य बिन्दु से बनी आकृतियाँ
Figure formed by Joining midpoints of Quadrilateral

दी गयी आकृति (Given figure)	भुजाओं के क्रमागत मध्य बिन्दुओं से बनी आकृति (Quadrilateral formed by joining mid points of sides)
समान्तर चतुर्भुज (Parallelogram)	समान्तर चतुर्भुज (Parallelogram)
आयत (Rectangle)	समचतुर्भुज (Rhombus)
समचतुर्भुज (Rhombus)	आयत (Rectangle)
वर्ग (Square)	वर्ग (Square)

TEAM SPY

बहुभुज (Polygon)

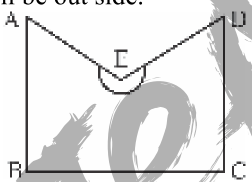
- तीन या तीन से अधिक भुजाओं से बन्द आकृति को बहुभुज कहते हैं।
  A closed figure with three or more sides is called a polygon.



बहुभुज के प्रकार (Types of Polygon)

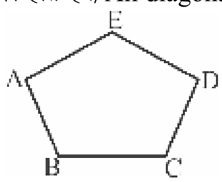
अवतल बहुभुज (Concave Polygon) :

- कोई भी एक कोण 180° से अधिक होता है।/ Any one angle is more than 180°.
- एक या एक से अधिक विकर्ण बाहर होते हैं।/one or more diagonals will be out side.



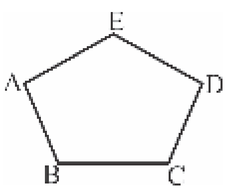
उत्तल बहुभुज (Convex Polygon):

- प्रत्येक आंतरिक कोण 180° से कम होते हैं।/ Each interior angle is less than 180°.
- सभी विकर्ण अन्दर होते हैं।/All diagonals will be inside.



नियमित बहुभुज (Regular polygon) :

- ऐसा उत्तल बहुभुज जिसकी प्रत्येक भुजा बराबर हो।/A convex polygon in which each side is equal
- प्रत्येक आन्तरिक कोण बराबर हो।/Each interior angle is equal.



➢	सभी आन्तरिक कोणों का योगफल (Sum of all interior angles)	$(2n-4)\times\frac{\pi}{2}$
➢	प्रत्येक आन्तरिक कोण (Each interior angle)	$\frac{(2n-4)}{n}\times\frac{\pi}{2}$
➢	सभी बाह्य कोणो का योगफल (Sum of all exterior angles)	360
➢	प्रत्येक बाह्य कोण (Each exterior angle)	$\frac{360}{n}$
➢	आंतरिक कोण + बाह्य कोण (Interior angle + exterior angle)	180°
➢	समबहुभुज का परिमाप (Perimeter of regular polygon)	$n\times a$
➢	अंतः त्रिज्या/Inradius (r)	$\frac{a}{2}\text{Cot}\frac{\pi}{n}$
➢	बाह्य त्रिज्या/Circum radius (R)	$\frac{a}{2}\text{cosec}\frac{\pi}{n}$
➢	अंतः त्रिज्या और बाह्य त्रिज्या का अनुपात/Ratio of inradius and circum radius (r : R)	$\cos\frac{\pi}{n}$
➢	क्षेत्रफल (Area)	$\frac{na^2}{4}\cot\frac{180}{n}$
➢	क्षेत्रफल (Area)	$\frac{n}{2}R^2\sin\frac{360}{n}$

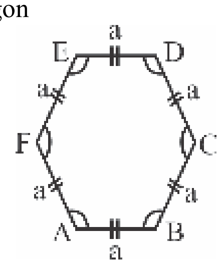
विकर्ण (Diagonal) :

- यदि हम किसी बहुभुज की दो असंगत शीर्षों को मिलाये तो यह विकर्ण कहलाता है।
  If we join any two (non adjacent) vertex of a polygon then that is a diagonal.

  विकर्णों की संख्या (No of diagonals) = $\frac{n(n-3)}{2}$

नियमित षटभुज (Regular Hexagon)

- छः समान भुजाओं से बंद आकृति को नियमित षटभुज कहते हैं।/A closed figure with six equal sides is called a regular hexagon



AB = BC = CD = DE = EF = FA = a

$\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = \angle E = \angle F$

प्रत्येक अंतःकोण (Each interior angle) = $\frac{(2n-4)}{n}\times\frac{\pi}{2}$

$\because n = 6$

$\therefore$ प्रत्येक अंतःकोण (Each interior angle)

$$= \frac{(2\times 6-4)}{6}\times\frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{8}{6}\times 90$$

$$\mathbf{= 120^o}$$

प्रत्येक बाह्य कोण (Each exterior angle) $= \frac{360}{n}$

$$= \frac{360}{6}$$

$$\mathbf{= 60^o}$$

अथवा/or

अंतःकोण (Interior) + बाह्य कोण (Exterior) = $\mathbf{180^o}$

120^o + Exterior = 180^o,

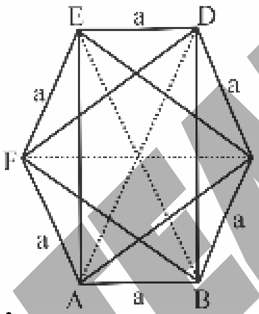
Exterior angle = $180^o - 120^o \Rightarrow \mathbf{60^o}$

विकर्ण (Diagonal) :

विकर्णों की संख्या (No of diagonals) = $\frac{n(n-3)}{2}$

$\because n = 6$

$\therefore$ No. of diagonal = $\frac{6(6-3)}{2} = \mathbf{9}$



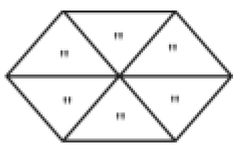
सबसे छोटे विकर्ण (Shortest diagonals) :

AC = BD = CE = DF = EA = FB = $a\sqrt{3}$

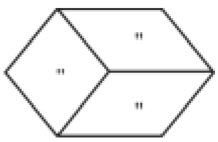
सबसे बड़े विकर्ण (Longest diagonals) :

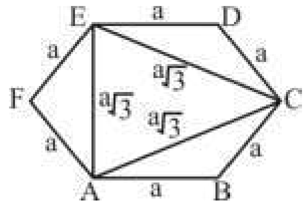
FC = AD = BE = 2a

- नियमित षटभुज 6 समबाहु त्रिभुज से मिलकर बना होता है। (A regular hexagon is made up of 6 equilateral triangles)



- नियमित षटभुज 3 सम चतुर्भुज से मिलकर बना होता है। (A regular hexagon is made up of 3 rhombuses)



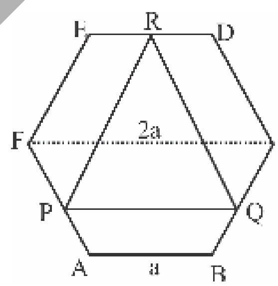
- क्षेत्रफल (Area) = $6\times\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$
- परिमाप (Perimeter) = 6a
- 

$\because$ AC = CE = AE = $a\sqrt{3}$

$\therefore$ Δ AEC का क्षेत्रफल (Area) = $\frac{\sqrt{3}}{4}\times\left(a\sqrt{3}\right)^2$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}\times a^2\times 3$$

$$= \mathbf{\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2}$$

- $$\frac{\text{Area of } \triangle \text{ AEC}}{\text{Area of } \hexagon\text{ABCDEF}} = \frac{1}{2}$$
- 

{P, Q, R → मध्य बिन्दु (mid points)}

$\because PQ = \frac{AB+FC}{2}$

$PQ = \frac{a+2a}{2}\Rightarrow\frac{3a}{2}$

इसी प्रकार/similarly,

PR = QR = 2a

तब/then,

ΔPQR का क्षेत्रफल = $\frac{\sqrt{3}}{4}\ \frac{3a}{2}\ ^2$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{9a^2}{4}$$

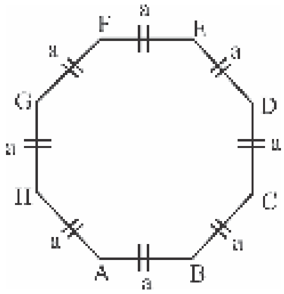
$$= \mathbf{\frac{9\sqrt{3}}{16}a^2}$$

- $$\frac{\text{Area of } \triangle \text{ PQR}}{\text{Area of } \hexagon\text{ABCDEF}} = \frac{3}{8}$$

TEAM SPY

नियमित अष्टभुज (Regular Octagon)

■ आठ समान भुजाओं से बंद आकृति को नियमित अष्टभुज कहते हैं।/A closed figure with eight equal sides is called a regular octagon.



AB = BC = CD = DE = EF = FG = GH = HA = a

$\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = \angle E = \angle F = \angle G = \angle H$

प्रत्येक अंतःकोण (Each interior angle) = $\frac{(2n-4)}{n} \times \frac{\pi}{2}$

$\because n = 8$

$\therefore$ प्रत्येक अंतःकोण (Each interior angle)

$$= \frac{(2\times 8-4)}{8} \times \frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{12}{8} \times 90 \Rightarrow \mathbf{135^o}$$

प्रत्येक बाह्य कोण (Each exterior angle) = $\frac{360}{n}$

$$= \frac{360}{8} \Rightarrow \mathbf{45^o}$$

अथवा/or

अंतःकोण (Interior) + बाह्य कोण (Exterior) = **180°**

135° + Exterior = 180°,

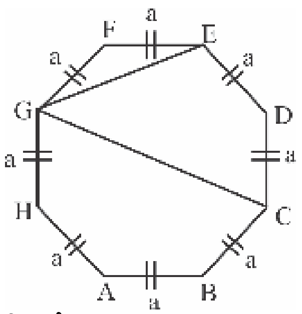
Exterior angle = 180° – 135° ⇒ **45°**

विकर्ण (Diagonal) :

विकर्णों की संख्या (No of diagonals) = $\frac{n(n-3)}{2}$

$\because n = 8$

$\therefore$ No. of diagonal = $\frac{8(8-3)}{2}$ = **20**



➢ सबसे छोटा विकर्ण (Shortest diagonal) = GE (इसी प्रकार अन्य/similarly others)

➢ सबसे बड़ा विकर्ण (Largest diagonal) = GC

➢ GE : GC = 1 : $\sqrt{2}$

➢ क्षेत्रफल (Area) = $2(\sqrt{2}+1)a^2$

➢ अंतः त्रिज्या (Inradius) r = $\frac{a}{2\sqrt{2}-2}$

➢ बाह्य त्रिज्या (circum radius)

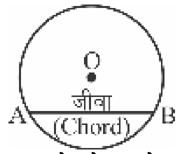
$$R = \frac{a}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} \Rightarrow \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}a$$

वृत्त (Circle)

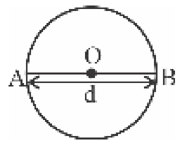
■ किसी एक निश्चित बिन्दु से समान दूरी पर स्थित बिन्दुओं का बिन्दुपथ वृत्त कहलाता है। यह निश्चित बिन्दु, वृत्त का केन्द्र कहलाता है।/The locus of points equidistant from a fixed point is called a circle. This fixed point is called the center of the circle.

वृत्त (Circle)

जीवा (Chord) –: वृत्त की जीवा एक रेखाखंड है जो वृत्त की परिधि पर दो बिन्दुओं को जोड़ती है।/A chord of a circle is a line segment that connects two points on the circumference of a circle.

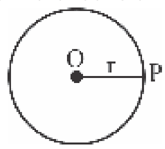


व्यास (Diameter) –: वृत्त के केन्द्र से गुजरने वाली जीवा व्यास कहलाती है।/The chord passing through the centre of circle is called diameter.



➢ **व्यास/Diameter (AB) = d**

त्रिज्या (Radius) –: वृत्त के केन्द्र से उसकी परिधि तक की दूरी को त्रिज्या कहते हैं।/The distance from the centre of a circle to its circumference is called radius.



➢ **त्रिज्या/Radius (OP) = r**

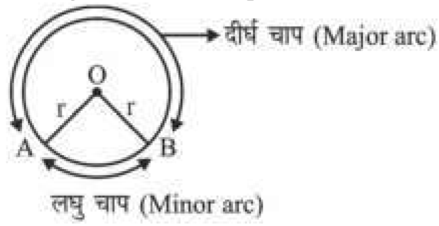
➢ $\mathbf{r = \frac{d}{2}}$

➢ **परिधि/Circumference (C) = 2πr**

➢ **क्षेत्रफल/Area (A) = πr^2**

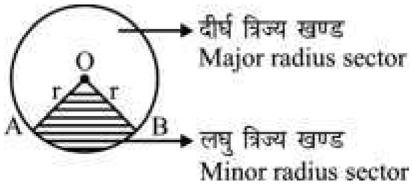
चाप (Arc) –: एक चाप दो बिन्दुओं के बीच एक वृत्त की परिधि, या घुमावदार किनारे का एक भाग है।

An arc is a portion of a circle's circumference or curved edge, between two points.



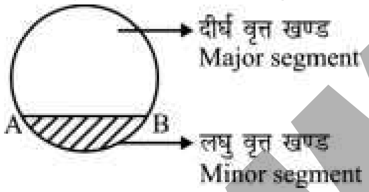
त्रिज्य खण्ड (Radius sector) –: त्रिज्या द्वारा विभाजित किये गये भाग को त्रिज्य खण्ड कहते है।

The part cut by radius is called sector.



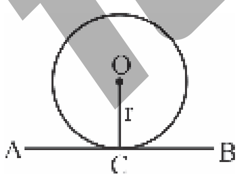
वृत्त खण्ड –: जीवा द्वारा विभाजित किये भाग को वृत्त खण्ड कहते है।

The part cut by chord is called segment.



स्पर्श रेखा : (Tangent) –: वृत्त की स्पर्श रेखा सीधी रेखा होती है। जो वृत्त की परिधि रेखा को केवल एक बिन्दु पर स्पर्श करती है।

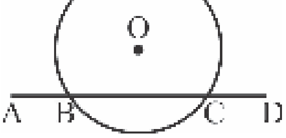
A tangent of a circle is a straight line that touches the circumference of the circle at only one point.



- **स्पर्श रेखा/Tangent = ACB**
- **$\angle ACO = \angle BCO = 90^o$**

छेदक रेखा : (Secant) :– एक सीधी रेखा जो एक वृत्त को दो बिन्दुओं पर काटती है। वृत्त की छेदक रेखा कहलाती है।

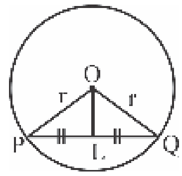
A straight line that intersects a circle in two points is called secant line of circle.



- **छेदक रेखा/Secant = ABC**

प्रमेय (Theorem)

■ किसी वृत्त के केन्द्र से जीवा पर डाला गया लम्ब जीवा को समद्विभाजित करता है।/The perpendicular from the centre of a circle to a chord bisects the chord.



यदि/If $OL \perp PQ$

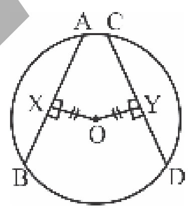
तब/then PL = LQ

प्रमेय का विपरीत (Converse of theorem) :

यदि/If PL = LQ

तब/then $OL \perp PQ$

■ किसी वृत्त की समान जीवाऐं केन्द्र से समदूरस्थ होती है।/Equal chords of a circle are equidistant from the centre.



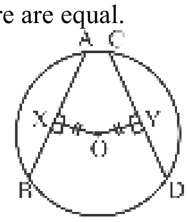
यदि/If AB = CD,

$OX \perp AB$ & $OY \perp CD$

तब/then OX = OY

प्रमेय का विपरीत (Converse of theorem):

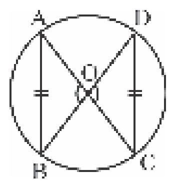
एक वृत्त की जीवाऐं जो केन्द्र से समदूरस्थ है आपस में बराबर होती है।/Chords of a circle which are equidistant from the centre are equal.



यदि/If OX = OY, $OX \perp AB$ & $OY \perp CD$

तब/then AB = CD

■ किसी वृत्त की दो समान जीवाए केन्द्र पर समान कोण बनाती है।/Equal chords of a circle subtend equal angles at centre.



यदि/If AB = CD

तब/then $\angle AOB = \angle COD$

TEAM SPY

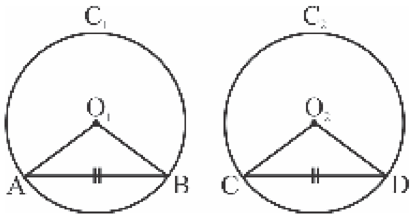
प्रमेय का विपरीत (Converse of theorem) :

यदि/If $\angle$ AOB = $\angle$COD

तब/then AB = CD

■ दो बराबर वृत्तों की बराबर जीवाएं उनके केन्द्र पर बराबर कोण बनाती है।

Equal chords of two equal circles subtend equal angles at their centers.



यदि/If AB = CD

तब/then $\angle$ AO_1B = $\angle CO_2D$

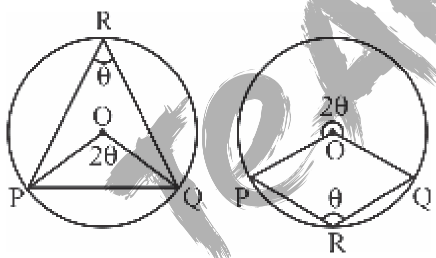
प्रमेय का विपरीत (Converse of theorem) :

यदि/If $\angle AO_1B$ = $\angle CO_2D$

तब/then AB = CD

■ किसी वृत्त के चाप द्वारा केन्द्र पर बना कोण, परिधि पर बने कोण का दोगुना होता है।

The angle subtended by an arc of a circle at the centre is double, the angle subtended on the circumference of the circle.

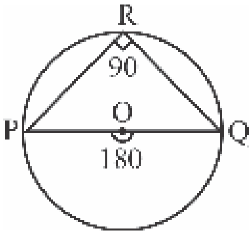


यदि/If $\angle$ PRQ = θ°

तब/then $\angle$ POQ = 2θ

■ अर्धवृत्त पर बना कोण समकोण होता है।

The angle of a semicircle is a right angle.



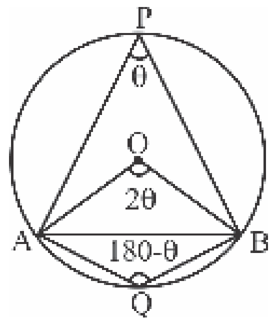
यदि PQ वृत्त का व्यास हो

If PQ is the diameter of circle

तब/then $\angle$ PRQ = 90°

■ दीर्घवृत्त खण्ड और लघुवृत्त खण्ड में कोण सम्पूरक होते हैं।

The angles in the major segment and the minor segment are supplementary.



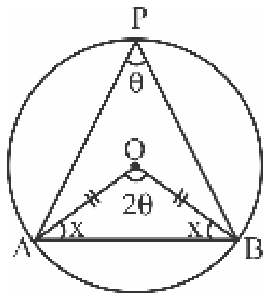
यदि/If $\angle$AOB = 2θ

तब/then $\angle$APB = θ

पुनः/again $\boxed{\angle AQB = 180 - \theta}$

($\because$ AQBP →चक्रीय चतुर्भुज/cyclic quadrilateral)

■



In Δ AOB,

$\angle$AOB + $\angle$OBA + $\angle$BAO = 180°

2θ + x + x = 180°

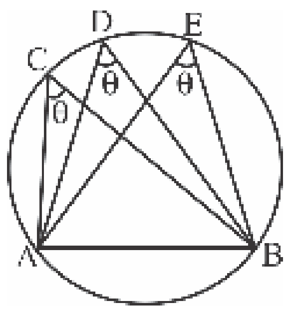
2(x + θ) = 180°

x + θ = 90

AO = BO = Circum radius (परित्रिज्या)

■ किसी वृत्त के एक ही वृत्तखण्ड में बने कोण बराबर होते हैं।

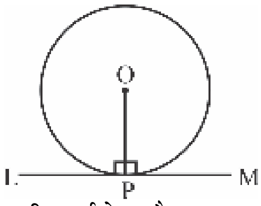
The angle in the same segment of a circle are equal.



$\angle$ACB = $\angle$ADB = $\angle$AEB = θ

■ वृत्त के किसी बिन्दु पर स्पर्श रेखा, स्पर्श बिन्दु से होकर खींची गई त्रिज्या पर लम्ब होती है।

The tangent at any point on a circle is perpendicular to the radius drawn through the point of contact.

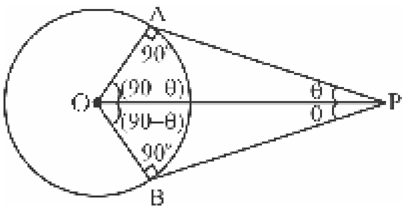


यदि LM वृत्त की स्पर्श रेखा है।

If LM is the tangent of circle

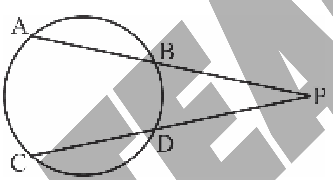
तब/then OP ⊥ LM

■



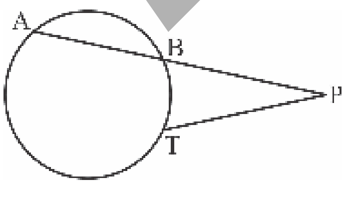
- PA = PB
- ∠PAO = ∠PBO = 90
- ∠APO = ∠BPO = θ
- ∠AOP = ∠BOP = 90–θ
- ΔPAO ≅ ΔPBO
- $OP^2 = OA^2 + AP^2$
- $OP^2 = OB^2 + BP^2$

■



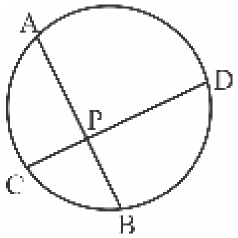
PA × PB = PC × PD

■



PT^2 = PA × PB

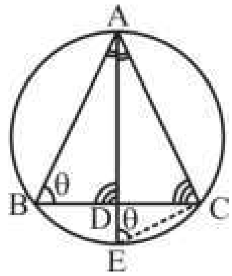
■



PA × PB = PC × PD

■ यदि ∠ BAC का कोण समद्विभाजक AE है

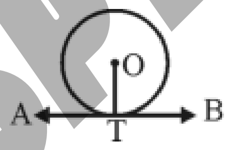
If AE is angle bisector of ∠ BAC.

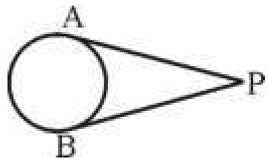


- **ΔABD ~ ΔAEC**
- **AB × AC = AD × AE**
- **AB × AC + DE × AE = AE^2**

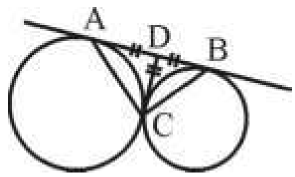
■ वृत्त के किसी एक बिन्दु से वृत्त पर केवल एक ही स्पर्श रेखा खीची जा सकती है। परन्तु वृत्त के किसी बाह्य बिन्दु से (P) वृत्त पर दो स्पर्श रेखाएं खीची जा सकती है।

Only one tangent can be drawn on a circle from one point of the circle. But two tangent lines can be drawn on the circle from any point outside the circle.



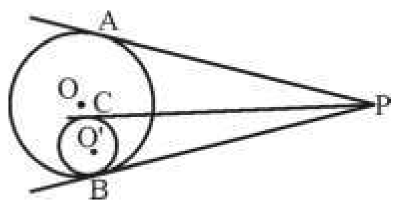


■



- **AD = BD = CD**
- **∠ ACB = 90°**

■

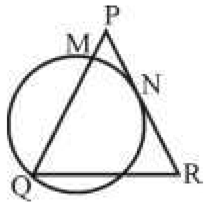


- PA = PB = PC

■ PQR एक समद्विबाहु त्रिभुज है जिसमें PQ = PR है। एक वृत्त जो बिन्दु Q से होकर गुजरता है और PR के मध्य बिन्दु N पर स्पर्श करता है तथा PQ को M पर प्रतिच्छेद करता है तब

PQR is an isosceles triangle with PQ = PR. A circle through point Q and touches the point N of mid point of PR and intersects PQ at M then-

TEAM SPY



$PN^2 = PM \times PQ$

$$\left(\frac{1}{2}PQ\right)^2 = PM \times PQ$$

$$\because PQ = PR \left(\text{समद्विबाहु } \Delta / \text{Isosceles } \Delta\right)$$

$$\& \ PN = \frac{1}{2}PR$$

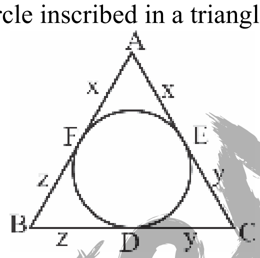
$$\therefore PN = \frac{1}{2}PQ$$

$$\frac{1}{4}PQ^2 = PM \times PQ$$

$$\frac{PQ}{4} = PM$$

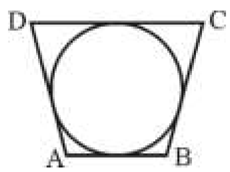
$$\frac{PM}{PQ} = \frac{1}{4} \Rightarrow \boxed{PM : PQ = 1 : 4}$$

■ जब एक वृत्त Δ के अन्दर हो–
When a circle inscribed in a triangle :



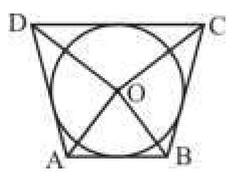
➢ **AB + BC + CA = 2(x + y + z)**

■ जब एक वृत्त चतुर्भुज के अन्दर स्थित हो–
When a circle inscribed in a quadrilateral :



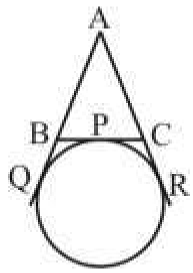
➢ **AB + CD = BC + AD**

■



➢ **∠AOB + ∠COD = 180**
➢ **∠BOC + ∠AOD = 180**

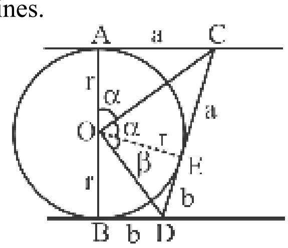
■



ΔABC का परिमाप (Perimeter) =
AB + BC + AC
AB + BP + PC + AC
AB + BQ + CR + AC
$\{\because BP = BQ \ \& \ CP = CR\}$
AQ + AR
2AQ ⇒ 2AR $\{\because AQ = AR\}$
अतः परिमाप (Perimeter) = 2AQ = 2AR

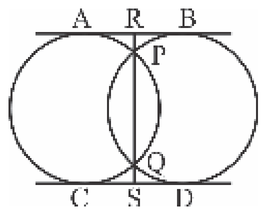
उभयनिष्ठ स्पर्श रेखाएं (Common tangents)

■ जब दो समान्तर रेखाओं के बीच एक वृत्त खीचा जाता है और इन दो समान्तर रेखाओं को काटती हुयी एक स्पर्श रेखा खीची जाती है।
When a circle is drawn between two parallel lines and a tangent is drawn intersecting these two parallel lines.



∠COD = 90
$2\alpha + 2\beta = 180$
➢ $\boldsymbol{\alpha + \beta = 90}$
➢ $\mathbf{r = \sqrt{ab}}$

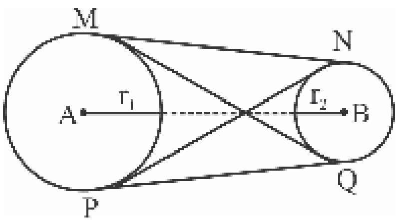
■ दो वृत्त एक दूसरे को भिन्न बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करते हैं तथा दो उभयनिष्ठ स्पर्श रेखाऐं दी गयी है–
Two circles intersect each other at two distinct points and two common tangents are given then–



➢ **AB = CD**
➢ $\mathbf{RS^2 = AB^2 + PQ^2}$
➢ $\mathbf{RS^2 = CD^2 + PQ^2}$

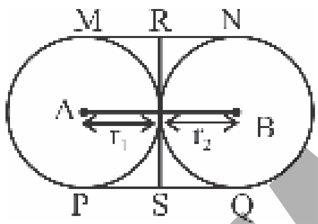
■ **दो वृत्तों पर उभयनिष्ठ स्पर्श रेखाऐ (Common tangent lines on two circles) :** दो वृत्तों पर अधिकतम चार तथा न्यूनतम शून्य उभयनिष्ठ स्पर्श रेखाएं खीची जा सकती है।
On two circles, maximum 4 and minimum zero common tangents can be drawn.

- **चार उभयनिष्ठ स्पर्श रेखाऐं (For common tangents):**



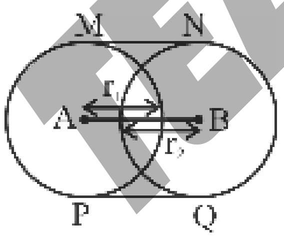
➢ **$AB > (r_1 + r_2)$**
➢ दो अनुस्पर्श उभयनिष्ठ स्पर्श रेखाएं (Two direct common tangents) = MN & PQ
➢ दो अनुप्रस्थ उभयनिष्ठ स्पर्श रेखाएं (Two transverse common tangents) = MQ & NP

- **तीन उभयनिष्ठ रेखाऐ (Three common tangents):**



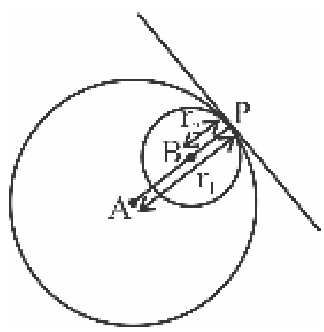
➢ **$AB = r_1 + r_2$**

- **दो उभयनिष्ठ देखाऐ (Two common tangents):**



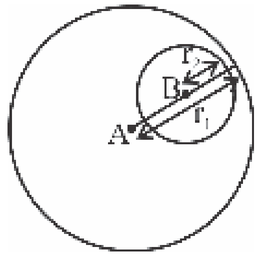
➢ **$|r_1 - r_2| < AB < (r_1 + r_2)$**

- **एक उभयनिष्ठ रेखा (One common tangent):**



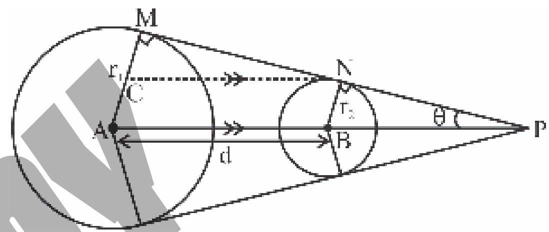
➢ **$AB = |r_1 - r_2|$**

- **शून्य उभयनिष्ठ रेखा (Zero common tangent):**



➢ **$AB < |r_1 - r_2|$**

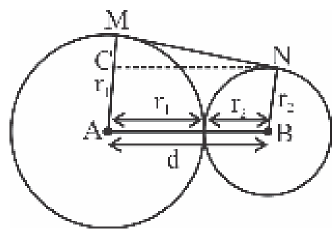
अनुस्पर्श उभयनिष्ठ रेखाएं (Direct Common tangent)



➢ $MN = \sqrt{d^2 - (r_1 - r_2)^2}$
➢ $\Delta PAM \sim \Delta PBN$
➢ $\frac{PA}{PB} = \frac{PM}{PN} = \frac{r_1}{r_2}$ {बाह्यतः विभाजन (External intersection)}
➢ $AP = d \times \frac{r_1}{|r_1 - r_2|}$
➢ $BP = d \times \frac{r_2}{|r_1 - r_2|}$
➢ $PM = MN \times \frac{r_1}{|r_1 - r_2|}$ $\sqrt{d^2 \quad (r_1 \quad r_2)^2}$ $\frac{r_1}{|r_1 - r_2|}$
➢ $PN = MN \times \frac{r_2}{|r_1 - r_2|}$ $\sqrt{d^2 \quad (r_1 \quad r_2)^2}$ $\frac{r_2}{|r_1 - r_2|}$

■ **विशेष स्थिति (Special Condition):**

-



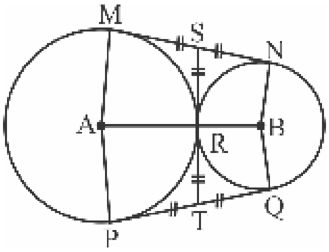
$\because MN = \sqrt{d^2 - (r_1 - r_2)^2}$ $(\because d = r_1 + r_2)$

$MN = \sqrt{(r_1 + r_2)^2 - (r_1 - r_2)^2}$

$MN = 2 \times \sqrt{r_1 r_2}$

TEAM SPY

•

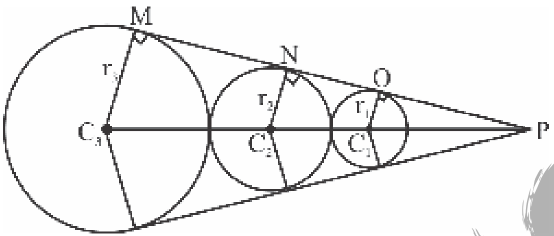


- SR = SM = SN
- RT = TP = TQ

अतः/Hence,

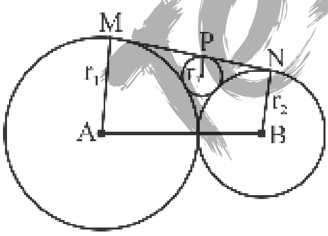
- **ST = MN = PQ**

•



- r_1, r_2 तथा r_3 हमेशा गुणोत्तर श्रेणी में होंगे।
  r_1, r_2 and r_3 are always in geometric progression (G.P.)
- $\mathbf{r_2 = \sqrt{r_1 r_3}}$

•

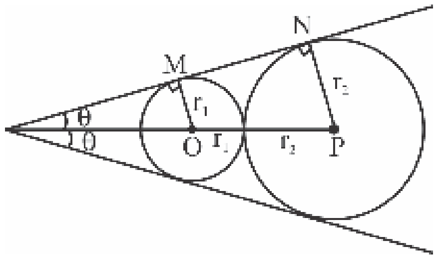


- $MP = 2\times\sqrt{r_1.r_3}$
- $NP = 2\times\sqrt{r_2.r_3}$
- $MN = 2\times\sqrt{r_1.r_2}$
- MN = MP + NP
- $2\times\sqrt{r_1.r_2} = 2\times\sqrt{r_1.r_3} + 2\times\sqrt{r_2.r_3}$

Divide by $\sqrt{r_1.r_2.r_3}$

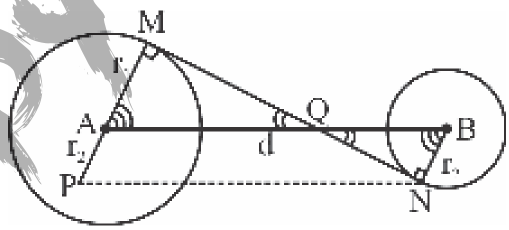
- $\mathbf{\frac{1}{\sqrt{r_3}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}}}$

•



- $OP = r_1 + r_2$
- $\mathbf{\frac{r_1}{r_2} = \frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}}$

अनुप्रस्थ उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा (Transverse Common Tangent)



- $MN = \sqrt{d^2-(r_1+r_2)^2}$
- $\Delta AMQ \sim \Delta BNQ$
- $\frac{AQ}{BQ} = \frac{MQ}{NQ} = \frac{r_1}{r_2}$

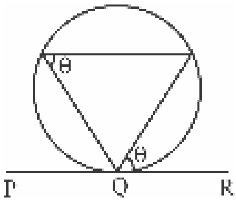
(अन्तः विभाजन/Interior Intersection)

- $AQ = d\times\frac{r_1}{(r_1+r_2)}$
- $BQ = d\times\frac{r_2}{(r_1+r_2)}$
- $MQ = MN\times\frac{r_1}{(r_1+r_2)}$
- $MQ = \sqrt{d^2-(r_1+r_2)^2}\times\frac{r_1}{(r_1+r_2)}$
- $NQ = MN\times\frac{r_2}{(r_1+r_2)}$
- $NQ = \sqrt{d^2-(r_1+r_2)^2}\times\frac{r_2}{(r_1+r_2)}$

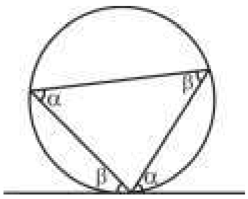
☞ अनुस्पर्श उभयनिष्ठ रेखा > उभयनिष्ठ अनुप्रस्थ रेखा
Direct common tangent > Transverse common tangent

एकान्तर वृत्तखण्ड प्रमेय
(Alternate segment theorem)

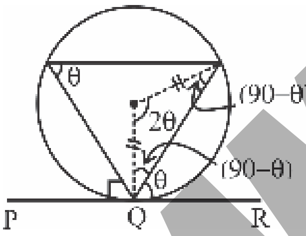
■ एक जीवा और स्पर्श रेखा द्वारा बनाया गया कोण जीवा द्वारा वृत्त के दूसरे खण्ड में बनाये गये कोण के बराबर होता है।
Angle made by a chord and tangent is equal to the angle made by the chord in other segment of the circle.



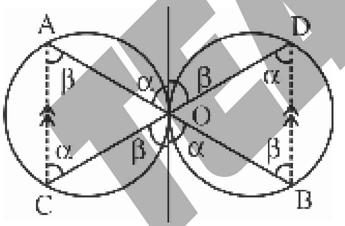
●



●



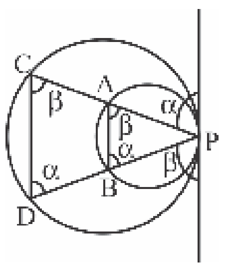
●



➢ $\Delta AOC \sim \Delta BOD$

➢ $\mathbf{\frac{AO}{BO} = \frac{OC}{OD} = \frac{AC}{BD}}$

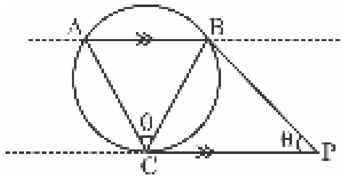
●



➢ $\Delta PAB \sim \Delta PCD$

➢ $\mathbf{\frac{PA}{PC} = \frac{PB}{PD} = \frac{AB}{CD}}$

●



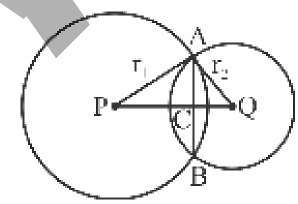
➢ यदि/If $AB \parallel CP$ & $\angle BPC = \theta$
तब/then $\angle ACB = \theta$

➢ AC = BC

➢ ΔABC समद्विबाहु त्रिभुज होगा
ΔABC will be an isosceles triangle

उभयनिष्ठ जीवा (Common chord)

■ r_1 तथा r_2 त्रिज्या के दो वृत्त एक दूसरे को प्रतिच्छेद करते हो तथा AB उनकी उभयनिष्ठ जीवा हो–
Two circles of radii r_1 and r_2 intersect each other and AB is the common chord of them–

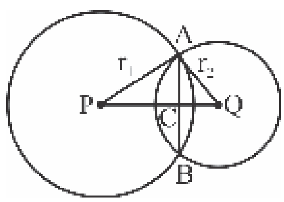


➢ $AC = BC = \frac{AB}{2}$

➢ $PQ = PC + CQ$

➢ $\mathbf{PQ = \sqrt{r_1^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2} + \sqrt{r_2^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2}}$

■ यदि PA और PQ संगत वृत्तों की स्पर्श रेखाएं हो,
तब ΔPAQ एक समकोण Δ होगा तथा $AC \perp PQ$.
If PA and PQ are the tangents of respective circles then PAQ is a right angled triangle and $AC \perp PQ$.



➢ $PQ = \sqrt{r_1^2 + r_2^2}$

$\because \Delta = \frac{1}{2} \times r_1 \times r_2$ .....(i)

& $\Delta = \frac{1}{2} \times PQ \times AC$ .....(ii)

From equation (i) & (ii)
$PQ \times AC = r_1 \times r_2$

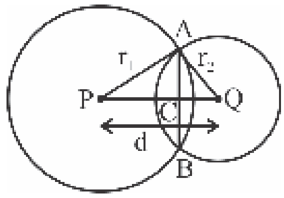
➢ $\mathbf{AC = \frac{r_1 \times r_2}{PQ}}$ $\{\because AB = 2 \times AC\}$

TEAM SPY

➢ $AB = \dfrac{2\times r_1\times r_2}{PQ}$ $\left\{\because PQ=\sqrt{r_1^2+r_2^2}\right\}$

➢ $AB = \dfrac{2\times r_1\times r_2}{\sqrt{r_1^2+r_2^2}}$

■ यदि AP और AQ वृत्तों की स्पर्श रेखाएें न हो/If AP and AQ are not tangents of respective circles तब/then,



$\because \Delta = \dfrac{1}{2}\times d\times AC$ ....(i)

$\Delta = \sqrt{S(S-r_1)(S-r_2)(S-d)}$ ....(ii)

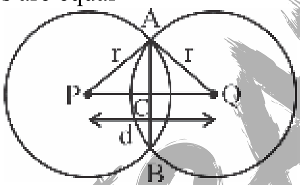
From equation (i) and (ii)

$\dfrac{1}{2}\times d\times AC = \sqrt{S(S-r_1)(S-r_2)(S-d)}$

$AC = \dfrac{2}{d}\sqrt{S(S-r_1)(S-r_2)(S-d)}$ $\{\because AB = 2AC\}$

$\boxed{AB = \dfrac{4}{d}\sqrt{S(S-r_1)(S-r_2)(S-d)}}$

■ जब दोनों वृत्तों की त्रिज्या बराबर हो/When raddi of both the circles are equal -



ΔAPC में,

$r^2 = AC^2 + PC^2$

$r^2 = \left(\dfrac{AB}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{d}{2}\right)^2$

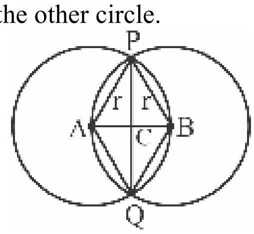
$r^2 = \dfrac{AB^2}{4}+\dfrac{d^2}{4}$

$4r^2 = AB^2 + d^2$

$AB^2 = 4r^2 - d^2$

➢ $AB = \sqrt{4r^2 - d^2}$

■ जब दो वृत्तों की त्रिज्या बराबर हो तथा दोनों वृत्त एक-दूसरे के केन्द्र से होकर गुजरते हैं/ When raddi of both the circles are equal and both the circles pass through the centres of the other circle.



➢ AP = BP = AB = r

➢ Δ APB एक समबाहु Δ होगा

ΔAPB is an equilateral triangle

➢ $PC = \dfrac{\sqrt{3}}{2}r$

$\left[\because \text{समबाहु त्रिभुज की ऊँचाई/Height of equilateral triangle} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}a\right]$

➢ $PQ = \sqrt{3}r$

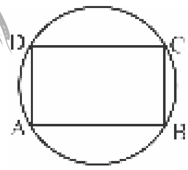
➢ **□APBQ एक समचतुर्भुज होगा।**

□APBQ is a rhombus.

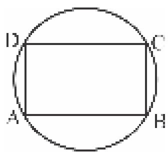
चक्रीय चतुर्भुज (Cyclic Quadrilateral)

यदि किसी चतुर्भुज के चारों शीर्ष किसी वृत्त की परिधि पर स्थित हो तो चतुर्भुज, ऐसा चक्रीय चतुर्भुज होगा–

If all four vertices of a quadrilateral lie on the circumference of a circle, then the quadrilateral is called a cyclic quadrilateral.



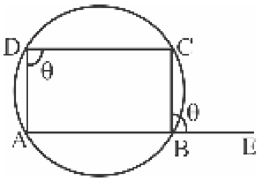
■ चक्रीय चतुर्भुज में, विपरीत कोणों का योगफल 180^o होता है। In cyclic quadrilateral, The sum of the opposite angles is 180^o.



➢ **$\angle A + \angle C = 180^o$**

➢ **$\angle B + \angle D = 180^o$**

■

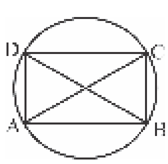


$\boxed{\angle ADC = \angle EBC = \theta}$

■ **टाल्मी प्रमेय (Ptolemy's theorem) :**

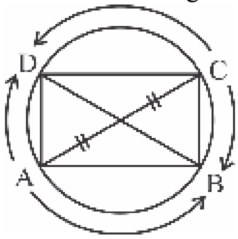
यदि ABCD एक चक्रीय चतुर्भुज है, तब-

If ABCD is a cyclic quadrilateral, then-



$\boxed{AB\times DC + BC\times AD = AC\times BD}$

■ यदि चक्रीय चतुर्भुज का एक विकर्ण दूसरे विकर्ण को समद्विभाजित करे, तब/If one diagonal of cyclic quadrilateral bisects other diagonal, then–



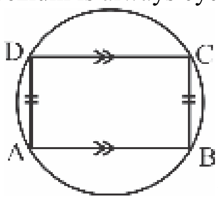
$AD \times AB = CB \times CD$

■ यदि चक्रीय चतुर्भुज की भुजाऐ a, b, c तथा d हों तो, चक्रीय चतुर्भुज का क्षेत्रफल/If the sides of a cyclic quadrilateral is a, b, c and d then, the area of the cyclic quadrilateral-

Area = $\sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)(S-d)}$

$S = \frac{a+b+c+d}{2}$

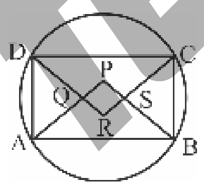
■ एक समद्विबाहु समलम्ब हमेशा चक्रीय चतुर्भुज होता है।/An isosceles trapezium is always cyclic quadrilateral.



➢ **$\angle A + \angle C = 180$**
➢ **$\angle B + \angle D = 180$**

■ वह चतुर्भुज, जिसे चक्रीय चतुर्भुज के कोण समद्विभाजको से बनाया गया हो, चक्रीय होगा।

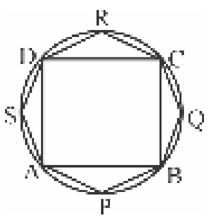
The quadrilateral formed by angle bisectors of a cyclic quadrilateral is also cyclic.



PQRS is a cyclic quadrilateral.

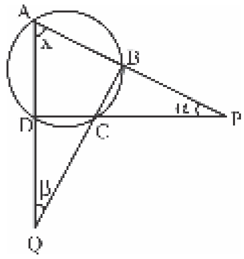
■ एक चक्रीय चतुर्भुज के बाहरी चार खण्डों में कोणों का योग 6 समकोण (540°) के बराबर होता है।

The sum of the angles in the four segments exterior to a cyclic quadrilateral is equal to 6 right angles.



➢ **$\angle P + \angle Q + \angle R + \angle S = 90 \times 6$**
➢ **$\angle P + \angle Q + \angle R + \angle S = 540$**

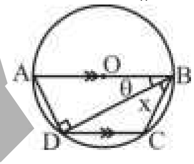
■ ABCD एक चक्रीय चतुर्भुज है।/ABCD is a cyclic quadrilateral.



➢ **$x = 90 - \frac{\alpha+\beta}{2}$**

■ यदि ABCD एक चक्रीय चतुर्भुज है, AB वृत्त का व्यास है और AB||DC तब–

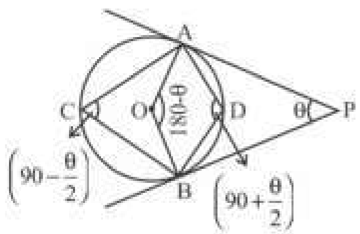
If ABCD is a cyclic quadrilateral, AB is the diameter of circle and AB ||DC, then–



➢ **$x = 90 - 2\theta$**

महत्वपूर्ण स्थितियाँ (Important Conditions)

■



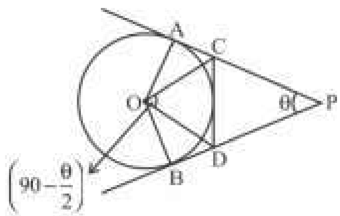
यदि/if $\angle APB = \theta$

➢ **$\angle AOB = 180 - \theta$**

➢ **$\angle ACB = 90 - \frac{\theta}{2}$**

➢ **$\angle ADB = 90 + \frac{\theta}{2}$**

■



यदि/if $\angle APB = \theta$

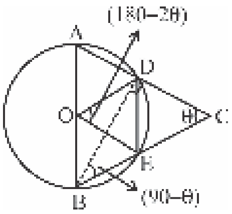
➢ **$\angle AOB = (180 - \theta)$**

➢ **$COD = \frac{AOB}{2}$**

➢ **$\angle COD = 90 - \frac{\theta}{2}$**

TEAM SPY

■

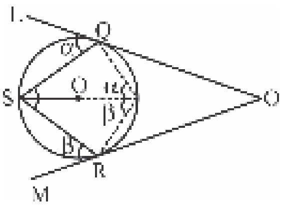


यदि/if $\angle ACB = \theta$

(AB वृत्त का व्यास है।/AB is the diameter of circle)

➢ **$\angle DOE = 180 - 2\theta$**

■



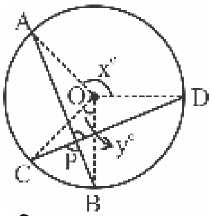
यदि/if $\angle LQS = \alpha$ & $\angle MRS = \beta$

➢ **$\angle QSR = 180 - (\alpha + \beta)$**

■ जब जीवाएँ आन्तरिक बिन्दु पर प्रतिच्छेद करती हो–

When the chords interest at the interior point–

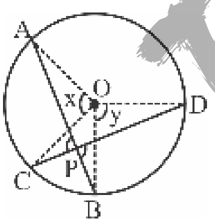
●



यदि/if $\angle AOD = x$ & $\angle BOC = y$

➢ **$\angle APD = \angle BPC = \frac{x+y}{2}$**

●

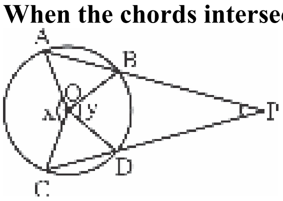


यदि/if $\angle AOC = x$ & $\angle BOD = y$

➢ **$\angle APC = \angle BPD = \frac{x+y}{2}$**

■ **जब जीवाएँ बाहरी बिन्दु पर प्रतिच्छेद करती हो–**

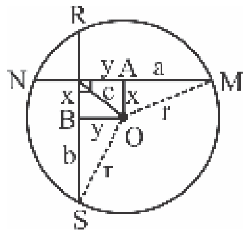
When the chords intersect at the external point–



यदि/if $\angle AOC = x$ & $\angle BOD = y$

➢ **$\angle APC = \angle BPD = \frac{x-y}{2}$**

■ किसी वृत्त की दो जीवाऐ जिनकी लंबाई क्रमशः 2a तथा 2b है एक दूसरे पर लम्ब हैं। यदि इनके प्रतिच्छेद बिन्दु से केन्द्र की दूरी c है तब वृत्त की त्रिज्या/The length of two perpendicular chords of circle are respectively 2a and 2b. If distance of its point of intersection from the centre is c, then the radius -



$r^2 = a^2 + x^2$ .....(i)

$r^2 = b^2 + y^2$ ......(ii)

From equation (i) and (ii)

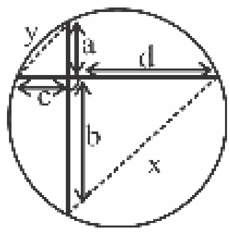
$2r^2 = a^2 + b^2 + x^2 + y^2$

$2r^2 = a^2 + b^2 + c^2$

$r^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}$ $\{\because x^2 + y^2 = c^2\}$

➢ $r = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}}$

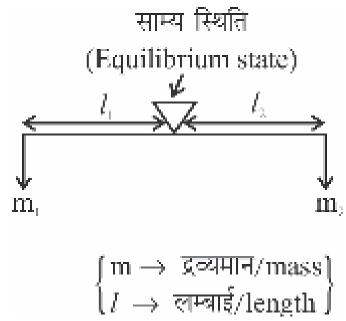
●



$r = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$

$r = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + y^2}$

द्रव्यमान बिन्दु ज्यामिति (Mass point Geometry)



➢ **$m_1 l_1 = m_2 l_2$**

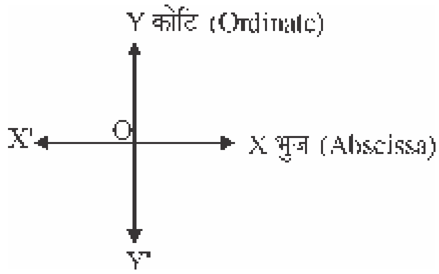
अतः/hence, $\frac{m_1}{m_2} = \frac{l_2}{l_1}$

TeAM SPY

19 निर्देशांक ज्यामिति (Co-ordinate Geometry)

TEAM SPY

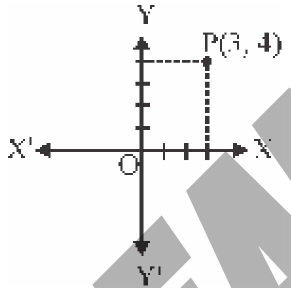
कार्तीय निर्देशांक प्रणाली (Cartesian Co-ordinate system)



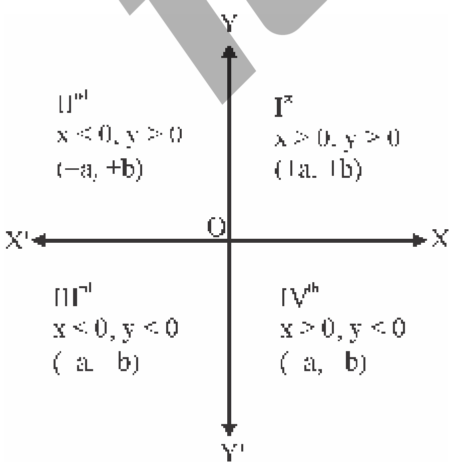
निर्देशांक = (भुज, कोटि)

Co-ordinate = (Abscissa, ordinate)

Ex.: P(3, 4)



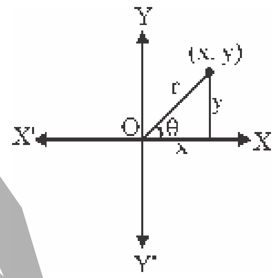
चतुर्थांश (पाद) (Quadrant)



☞ x-अक्ष या y-अक्ष पर स्थित कोई भी बिन्दु किसी भी पाद में नहीं होता।

Any point which is lies on x-axis or y-axis is not in any quadrant.

ध्रुवीय रूप (Polar form)



$\sin\theta = \frac{y}{r} \Rightarrow y = r\sin\theta$ ......(i)

$\cos\theta = \frac{x}{r} \Rightarrow x = r\cos\theta$ ......(ii)

From eq^n (i) / ((ii)

$\frac{y}{x} = \frac{r\sin\theta}{r\cos\theta}$

$\frac{y}{x} = \tan\theta$ tan $\frac{y}{x}$

From $(i)^2 + (ii)^2$

$y^2 + x^2 = r^2\sin^2\theta + r^2\cos^2\theta$

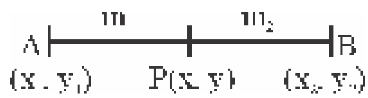
$y^2 + x^2 = r^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta)$

$y + x^2 = r^2$

| r^2 x^2 y^2 |

विभाजन सूत्र (Section Formula)

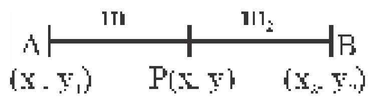
➢ **अन्तः विभाजन (Internal Section)**



यदि/If, AP : BP = $m_1 : m_2$

तब/then, $x = \frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2}$, $y = \frac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2}$

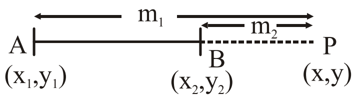
➢ **मध्य बिन्दु के निर्देशांक (Co-Ordinate of midpoint)**



यदि/If, AP : BP = $m_1 : m_2 = 1 : 1$

तब/then, $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$

➢ **बाह्य विभाजन (External section):**



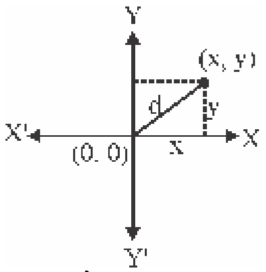
यदि/If, AP : BP = $m_1 : m_2$

तब/then, $x = \frac{m_1x_2 - m_2x_1}{m_1 - m_2}$, $y = \frac{m_1y_2 - m_2y_1}{m_1 - m_2}$

दूरी (Distance)

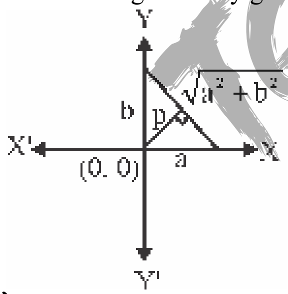
➢ **दो बिन्दुओं (x_1, y_1) तथा (x_2, y_2) के बीच की दूरी/The distance between two points (x_1, y_1) and (x_2, y_2):**
d = $\sqrt{(y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2}$

➢



X अक्ष से दूरी/ Distance from x axis $\Rightarrow$ y
Y अक्ष से दूरी/ Distance from y axis $\Rightarrow$ x
मूल बिन्दु से किसी बिन्दु की दूरी/Distance from origin $\Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2}$

➢ किसी दी हुई रेखा पर मूल बिन्दु से डाले गये लम्ब की लम्बाई ज्ञात करना (Find the length of perpendicular drawn from the origin on any given line):



$$P = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

➢ रेखा ax + by + c = 0 पर मूल बिन्दु से डाले गये लम्ब की लम्बाई/The length of perpendicular drawn from origin on the line ax + by + c = 0 :

$$P = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

➢ सरल रेखा ax + by + c = 0 की बिन्दु (x_1, y_1) से दूरी/The distance from point (x_1, y_1) to line ax + by + c = 0 in:

दूरी/distance $(d) = \frac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

➢ दो समान्तर रेखाओं ax + by + c = 0 तथा ax + by + d = 0 के बीच की दूरी/Distance between two parallel lines ax + by + c = 0 and ax + by + d = 0 :

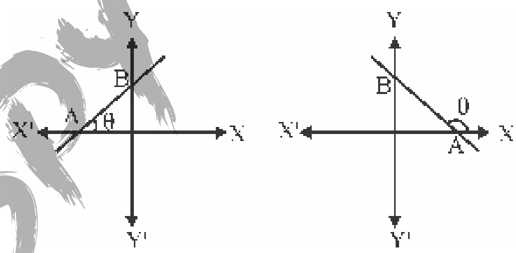
दूरी/Distance $(d) = \frac{|c - d|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

➢ बिन्दु (x_1, y_1) से सरल रेखा x cos α + y sin α = P पर डाले गये लम्ब की लम्बाई/Length of perpendicular drawn from point (x_1, y_1) to straight line x cos α + y sin α = p

दूरी/distance $(d) = \frac{x_1 \cos\alpha + y_1 \sin\alpha - p}{\sqrt{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}}$

$$d = x_1 \cos\alpha + y_1 \sin\alpha - p$$

रेखा की प्रवणता या ढाल (Slope or gradient of a line)



➢ $m = \tan\theta$ $\tan\theta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

➢ $m = \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)}$

➢ X अक्ष के समान्तर किसी रेखा की प्रवणता/Slope of a line parallel to X axis:
θ = 0
$\because$ m = tan θ m = tan 0
$m = 0$

➢ Y अक्ष के समान्तर किसी रेखा की प्रवणता/Slope of a line parallel to Y axis :
$\because$ θ = 90
m = tan θ m = tan 90
$m = \infty$

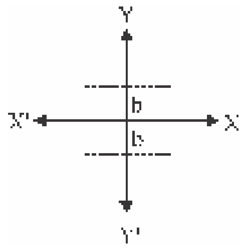
सरल रेखा (Straight Line)

➢ अन्तः खण्ड रूप समीकरण (Interior intersect form equation) $= \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

➢ प्रवणता रूप समीकरण (Gradient/slope form equation): y = mx + c

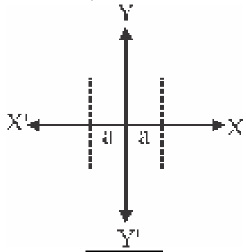
➢ व्यापक समीकरण (Standard equation): Ax+By+c=0

➢ x- अक्ष के समान्तर सरल रेखा का समीकरण जो उससे b दूरी पर हो/Equation of a straight line parallel to x axis at a distance "b" from it.



☞ $y = \pm b$

➢ y-अक्ष के समान्तर सरल रेखा का समीकरण जो उससे a दूरी पर होः (Equation of a straight line parallel to y axis at a distance "a" from it).



$x = \pm a$

रेखा का बिन्दु रूप समीकरण (Point form equation of line)

➢ जब दो बिन्दु दिये गये हो/When two points are given :

$$(y - y_1) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

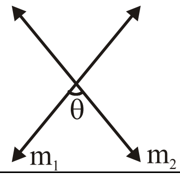
➢ जब प्रवणता और एक बिन्दु दिया गया हो/When given slope and a point :

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

➢ मूल बिन्दु से जाने वाली रेखा का समीकरण/Equation of line through origin :

$$y = mx$$

दो रेखाओं के बीच का कोण (Angle between two lines)



$$\tan\theta = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$$

➢ यदि दोनो रेखाएं एक-दूसरे के लम्बवत हो/If both lines are perpendicular to each other :

$\because \theta = 90^o$

$$m_1 m_2 = -1$$

➢ यदि दोनो रेखाएं एक-दूसरे के समान्तर हो/If both lines are parallel to each other :

$\because \theta = 0^o$

$$m_1 = m_2$$

➢ यदि दो रेखाऐं $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ तथा $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ दी गई हों/If two lines $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ and $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ are given :

$$\tan\theta = \frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_1a_2 + b_1b_2}$$

➢ लम्बवत होने के लिए/To be perpendicular :

$\because \theta = 90^o$

$$a_1a_2 + b_1b_2 = 0$$

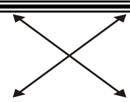
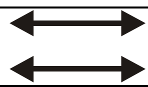
➢ समान्तर होने के लिए/To be parallel :

$\because \theta = 0^o$

$$a_1b_2 = a_2b_1$$

रेखाओं के प्रकार (Type of lines)

यदि समीकरण $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ तथा $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ दिये गये हों/If the equation $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ and $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ are given :

$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$	अद्वितीय हल Unique solution	संगत समीकरण consistent (independent)	प्रतिच्छेदी रेखा Intersecting lines	
$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$	अनन्त हल Infinitely many solution	संगत समीकरण consistent (dependent)	संपाती रेखा Coincident lines	
$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$	कोई हल नहीं No solution	असंगत समीकरण Inconsistent	समान्तर रेखाऐ Parallel lines	

■ **रेखा ax + by + c = 0 के समान्तर किसी रेखा का समीकरण/Equation of line parallel to line ax + by + c = 0**

$ax + by = \lambda$ जहाँ λ अचर (λ is constant)

☞ λ का मान निकालने के लिये समान्तर रूप समीकरण में दिए गये रेखा के बिन्दु का मान (x, y) के स्थान पर रखते हैं।/To find the value of λ, put the value of point on the given line in place of (x, y) in the parallel line equation.

TEAM SPY

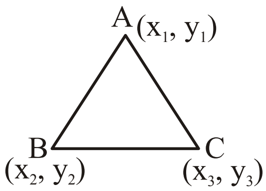
■ **रेखा ax + by + c = 0 पर लम्ब रेखा का समीकरण**
Equation of a line perpendicular to line ax + by + c = 0

$\boxed{ay - bx = \lambda}$ where λ is a constant

☞ λ का मान निकालने के लिये लम्ब रूप समीकरण में दिए गये रेखा के बिन्दु (x, y) के स्थान पर रखते हैं।/To find the value of λ, put the value of point on the given line in place of (x, y) in the perpendicular line equation.

त्रिभुज का क्षेत्रफल (Area of triangle)

➢ त्रिभुज का क्षेत्रफल जब तीनों बिन्दु दिये गये हो/(Area of triangle when all three points are given)-



☞ ΔABC का क्षेत्रफल/Area of ΔABC =

$$\frac{1}{2}|x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_3)|$$

➢ यदि Δ का क्षेत्रफल = 0 (If Area of Δ = 0)
☞ **तब तीनो बिन्दु संरेखीय होंगे/(then all three points are collinear).**

➢ सरल रेखा ax+by+c = 0, a ≠ 0, b ≠ 0 c ≠ 0 से बने Δ का क्षेत्रफल
Area of triangle with line ax+by+c = 0, a ≠ 0, b ≠ 0 c ≠ 0.

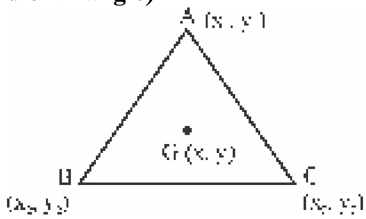
☞ $\boxed{\text{Area of } \Delta = \left|\frac{1}{2}\frac{c^2}{ab}\right|}$

➢ दो सरल रेखाओं द्वारा x-अक्ष के साथ बने Δ का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ (दोनो रेखाओं x अक्ष पर अन्तः खण्ड) × (दोनों रेखाओं के कटान बिन्दु का नियामक)
Area of triangle formed by two straight lines with x-axis = $\frac{1}{2}$ (difference of x-intercept of the two lines) × y coordinate of point of intersection of two lines.

➢ दो सरल रेखाओं द्वारा y अक्ष के साथ बने Δ का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ (दोनो रेखाओं के y अक्ष पर अंतःखण्ड का अन्तर) × (दोनों रेखाओं के कटान बिन्दु का x नियामक)/Area of triangle formed by two straight lines with y-axis $\Rightarrow \frac{1}{2}$ (difference of y-intercept of two lines) x (x coordinate of point f interaction of two lines)

त्रिभुज के केन्द्र (Centre of triangle)

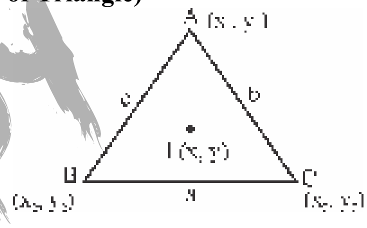
➢ **त्रिभुज के केन्द्रक के निर्देशांक (Coordinate of centroid of triangle)**



केन्द्रक के निर्देशांक (Coordinate of centroid)

$$G(x, y) = \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$$

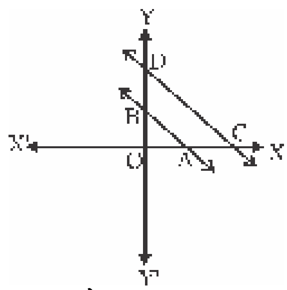
➢ **त्रिभुज के अंतः केन्द्र के निर्देशांक (Coordinate of in centre of Triangle)**



$$I(x, y) = \left(\frac{ax_1 + bx_2 + cx_3}{a + b + c}, \frac{ay_1 + by_2 + cy_3}{a + b + c}\right)$$

☞ लम्ब केन्द्र और परिकेन्द्र निकालने के लिये लम्ब रेखा के समीकरण निकालकर हल करते हैं।
Find the Co-ordinate circumcentre & ortho centre, to get perpendicular form equation and solve them.

■ **समान्तर रेखाओं ax + by + c = 0 तथा ax + by + d = 0 तथा अक्षों के बीच बने समलम्ब का क्षेत्रफल**
(Area of trapezium between two parallel lines ax + by + c = 0 and ax + by + d = 0)

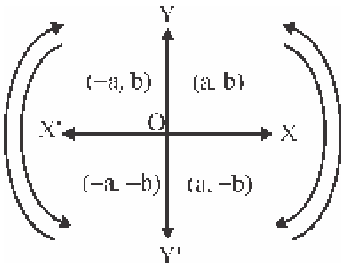


समलम्ब ABDC का क्षेत्रफल/Area of trapezium ABDC
= Area of ΔOCD – Area of Δ OAB

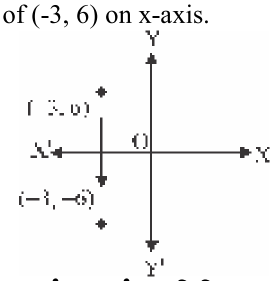
$$\Rightarrow \frac{1}{2}\left|\frac{d^2}{ab}\right| - \left|\frac{c^2}{ab}\right|$$

परावर्तन (Reflection)

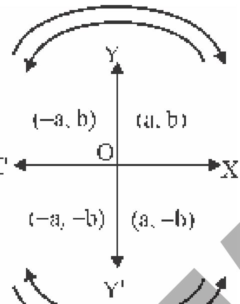
➢ **x-अक्ष पर परावर्तन (जल प्रतिबिम्ब) Reflection on the x-axis (water Image)**



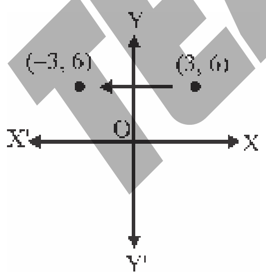
Ex.: x अक्ष पर (-3, 6) का परावर्तन क्या होगा/ What is the Reflection of (-3, 6) on x-axis.



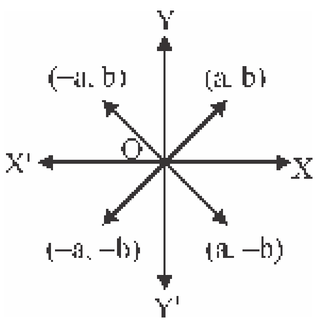
- **y-अक्ष पर परावर्तन (दर्पण प्रतिबिम्ब)/Reflection on y axis (Mirror Image):**



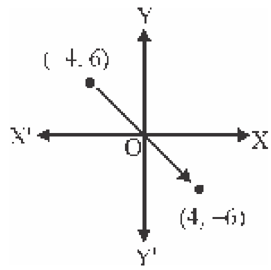
Ex.: y अक्ष पर (3, 6) का परावर्तन क्या होगा। what is Reflection of (3, 6) on y axis.



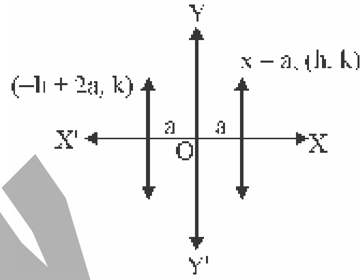
- **मूल बिन्दु पर परावर्तन (Reflection on origin) :**



Ex.: बिन्दु (4, -6) का प्रतिबिम्ब मूलबिन्दु पर क्या होगा। What is the reflection of (4, –6) on origin:



- **रेखा x = a में बिन्दु (h, k) का प्रतिबिम्ब In line x = a, the reflection of (h, k):**



or $\because \frac{x_1 + x_2}{2} = x$ & $\frac{y_1 + y_2}{2} = y$

$\Downarrow$

$\frac{h + x_2}{2} = a$ Constant (नियतांक)

$x_2 = 2a - h$ $\boxed{y = k}$

$\boxed{x_2 = -h + 2a}$ x = a में/In x = a,

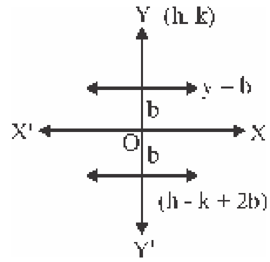
y → नियतांक/constant

अतः x = a में/Hence, In line x = a,

बिन्दु (h, k) का प्रतिबिम्ब/the reflection of (h, k)

= (–h + 2a, k)

- **रेखा y = b में (h, k) का प्रतिबिम्ब/In line y = b, the reflection of (h, k):**



or $\frac{x_1 + x_2}{2} = x$ & $\frac{y_1 + y_2}{2} = y$

$\Downarrow$ $\frac{k + y_2}{2} = b$

Constant (नियतांक) $y_2 = 2b - k$

$\boxed{x = h}$ $\boxed{y = -k + 2b}$

y = b में/In y = b

x → नियतांक/Constant

अतः रेखा y = b में/ Hence, In line y = b

बिन्दु (h, k) का प्रतिबिम्ब/ the reflection of (h, k)

⇒ (h,–k+2b)

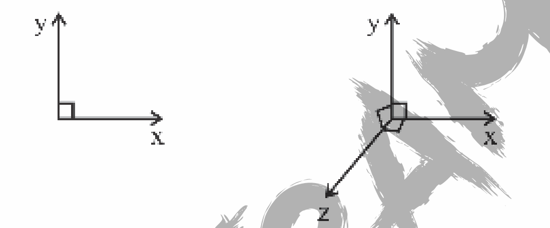
TEAM SPY

20 क्षेत्रमिति
(Mensuration)

क्षेत्रमिति (Mensuration)
↓
क्षेत्र + मिति
↓ ↓
खेत/स्थान मापन
↓
स्थान का मापन (Measurement of field)

आकृतियों के आयाम
(Dimensions of figures)

द्वि-दिशात्मक (Two-dimension) (2D)	त्रि-दिशात्मक Three-dimension) (3D)



द्वि-आयामी/विमीय क्षेत्रमिति (2D-Mensuration)

- ■ क्षेत्रमिति में, 2D आकृतियों को द्वि-आयामी आकृतियाँ कहा जाता है। इन आकृतियों के बारे में महत्वपूर्ण तथ्य–
  In mensuration, 2D shapes are called two-dimensional shapes. Some things about these shapes :
- ➢ 2D आकृतियाँ सपाट होती हैं।
  2D shapes are flat.
- ➢ इनमें केवल दो आयाम होते हैं, लम्बाई और चौड़ाई।
  They have only two dimension, length and width.
- ➢ इनमें मोटाई या गहराई नहीं होती है।
  There is no thickness or depth.
- ➢ इन आकृतियों की भुजाएं सीधी या घुमावदार रेखाओं से खींची जा सकती है।
  The sides of these shapes can be drawn with straight or curve lines.
- ➢ 2D आकृतियाँ मानचित्रों और छायाओं जैसे प्रतिनिधित्व के रूप में मौजूद होती है।
  2D shapes exists as representations such as maps and shadows.

द्वि-दिशात्मक आकृतियाँ
(Two-dimensional figure)

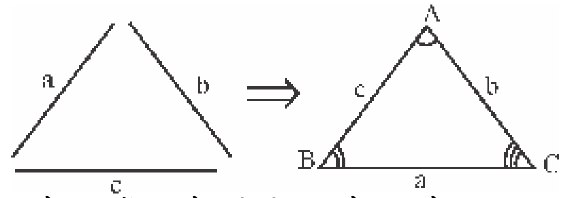
त्रिभुज (Triangle)	चतुर्भुज (Quadrilateral)	बहुभुज (Polygon)	वृत्त (Circle)

त्रिभुज (Triangle)

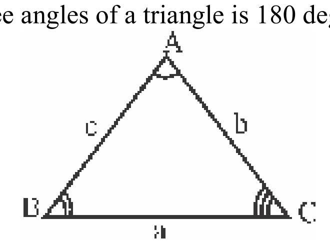
त्रिभुज (Triangle)

त्रि + भुज ⇓ तीन भुजाऐं	Tri + angle ⇓ Three angles

त्रिभुज का निर्माण (त्रिभुज की असमिका)
The construction of triangle (Inequality of triangle):



- ➢ दो भुजाओं का योग तीसरी भुजा से बड़ा होना चाहिए।/The sum of two sides must be greater than the third side.
  ☞ **$(a + b) > c$, $(b + c) > a$, $(c + a) > b$**
- ➢ दो भुजाओं का अंतर तीसरी भुजा से छोटा होना चाहिए।/The different between the two sides should be less than third side.
  ☞ **$|a – b| < c$, $|b – c| < a$, $|c - a| < b$**
- ➢ तीन भुजाओ से बन्द आकृति को त्रिभुज कहते हैं।/"A closed figure with three sides is called a triangle."
- ➢ त्रिभुज के तीनों कोणों का योग 180^o होता है।/ The sum of the three angles of a triangle is 180 degree.



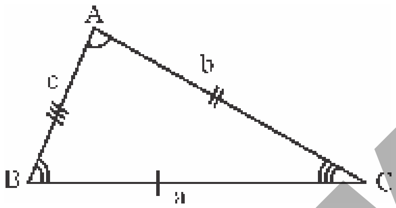
☞ **$\angle A + \angle B + \angle C = 180^o$**

त्रिभुज के प्रकार (Types of triangle)		
	भुजाओं के आधार पर (Based on sides)	कोणों के आधार पर (Based on angle)
1.	विषमबाहु त्रिभुज (Scalene triangle)	समकोण त्रिभुज (Right angled triangle)
2.	समद्विबाहु त्रिभुज (Isosceles triangle)	न्यूनकोण त्रिभुज (Acute angled triangle)
3.	समबाहु त्रिभुज (Equilateral triangle)	अधिक कोण त्रिभुज (Obtuse angled triangle)

भुजाओ के आधार पर त्रिभुज (Triangle Based on sides)

विषमवाहु त्रिभुज (Scalene Triangle)

■ ऐसा त्रिभुज जिसकी सभी तीनों भुजाऐ भिन्न-भिन्न हो उसे विषमबाहु त्रिभुज कहते है। विषमबाहु त्रिभुज के तीनो कोण भिन्न-भिन्न होते है।/A triangle whose all three sides are different is called a scalene triangle. All three angles of a scalene triangle are different.



➢ $BC \neq CA \neq AB$

➢ $\angle A \neq \angle B \neq \angle C$

■ **परिमाप (Perimeter) :**

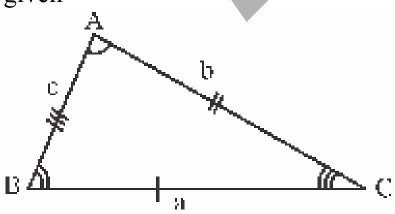
➢ $P = a + b + c$

अर्द्धपरिमाप (Semi perimeter) :

➢ $s = \frac{a+b+c}{2}$

■ **क्षेत्रफल (Area) :**

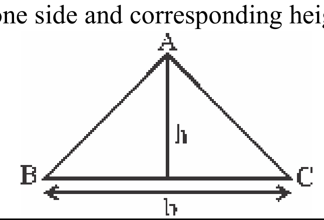
➢ जब तीनो भुजाऐ दी गयी हों/When all three sides are given -



☞ $\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

{हेरोइन्स सूत्र/Heron's formula}

➢ जब एक भुजा तथा संगत ऊँचाई दी गयी हो-
When one side and corresponding height are given.

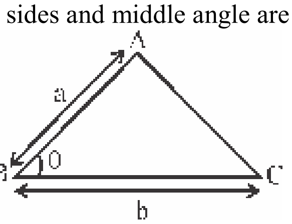


$\Delta = \frac{1}{2} \times$ आधार $\times$ ऊँचाई

$\Delta = \frac{1}{2} \times \text{base} \times \text{height}$

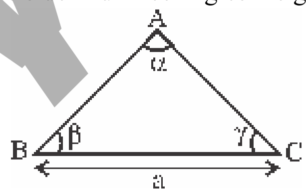
☞ $\Delta = \frac{1}{2} \times b \times h$

➢ जब दो भुजाऐ और बीच का कोण दिया है
When two sides and middle angle are given:



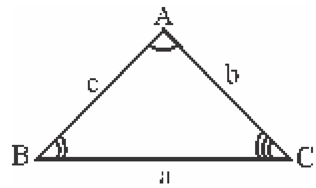
☞ $\Delta = \frac{1}{2}\, ab \sin\theta$

➢ जब एक भुजा और तीन कोण दिए गये हो-
When one side and three angles are given :



☞ $\Delta = \frac{1}{2} \frac{a^2 \sin\beta \sin\gamma}{\sin\alpha}$

■ **ज्या-नियम (Sine-Law):**



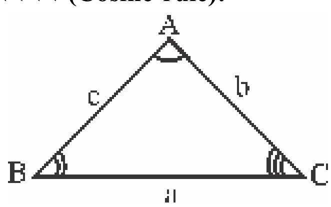
☞ $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$

{R→ परित्रिज्या/Circum-radius}

☞ $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = K$

{K → नियतांक/Constant}

■ **कोज्या-नियम (Cosine-rule):**



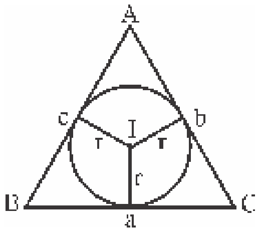
☞ $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ $\quad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

☞ $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$ $\quad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$

☞ $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$ $\quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$

TEAM SPY

■ **अन्तःवृत्त की त्रिज्या (Inradius) :**



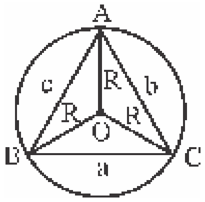
I → अंतःकेन्द्र (Incentre)

Δ → त्रिभुज का क्षेत्रफल (Area of triangle)

s → अर्द्ध परिमाप (Semi perimeter)

➢ $\mathbf{r = \frac{\Delta}{s}}$

■ **बाह्य वृत्त की त्रिज्या (Circum Radius):**



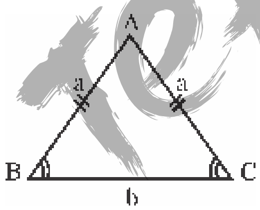
O → परिकेन्द्र (Circum centre)

R → परित्रिज्या (Circum radius)

➢ $\mathbf{R = \frac{abc}{4\Delta}}$

समद्विबाहु त्रिभुज (Isosceles Triangle)

■ ऐसा त्रिभुज जिसकी दो भुजाऐं बराबर हों, समद्विबाहु त्रिभुज कहलाता है। समद्विबाहु Δ में बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण बराबर होते हैं।/A triangle whose two sides are equal is called an isosceles triangle. In an isosceles triangle, the angles opposite to equal sides are equal.



➢ **AB = AC ≠ BC**

➢ **∠C = ∠B ≠ ∠A**

■ **परिमाप (Perimeter) :**

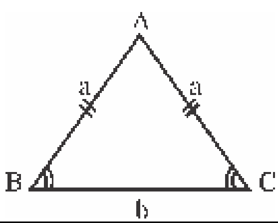
➢ **P = 2a + b**

अर्ध परिमाप (Semi Perimeter) :

➢ $\mathbf{S = \frac{2a+b}{2}}$

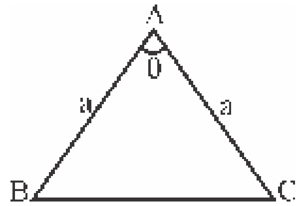
■ **क्षेत्रफल (Area):**

➢



$\because\ \Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-a)}$

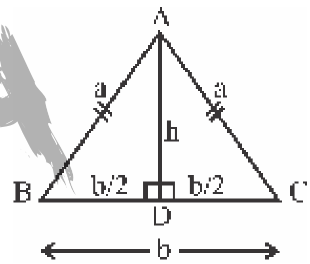
☞ $\mathbf{\Delta = (s-a)\sqrt{s(s-b)}}$ $\{\because a = c\}$



$\because\ \Delta = \frac{1}{2} \times a \times a \sin\theta$

☞ $\mathbf{\Delta = \frac{1}{2}a^2\sin\theta}$

➢



$\because$ ΔABD में Pythagoras theorem से,

$a^2 = h^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2$

$h^2 = a^2 - \frac{b^2}{4}$

$h^2 = \frac{4a^2 - b^2}{4}$

☞ $\mathbf{h = \frac{1}{2}\sqrt{(4a^2 - b^2)}}$

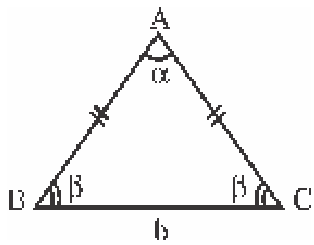
$\because\ \Delta = \frac{1}{2} \times b \times h$

$\Delta = \frac{1}{2} \times b \times \frac{1}{2} \times \sqrt{(4a^2 - b^2)}$

h का मान रखने पर (putting the value of h)

☞ $\mathbf{\Delta = \frac{b}{4} \times \sqrt{4a^2 - b^2}}$

➢



☞ $\mathbf{\Delta = \frac{b^2}{2} \times \frac{\sin^2\beta}{\sin\alpha}}$

समबाहु त्रिभुज (Equilateral triangle)

■ ऐसा त्रिभुज जिसकी तीनों भुजाऐं बराबर हो समबाहु Δ कहलाता है समबाहु त्रिभुज में, तीनों कोण बराबर अर्थात 60° के होते हैं।

A triangle whose three sides are equal is called an equilateral triangle. In an equilateral triangle, all three angles are equal i.e. 60 degree.

■ **परिमाप (Perimeter):**

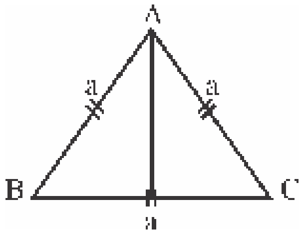
➢ $\mathbf{P = 3a}$

अर्ध परिमाप (Semiperimeter):

➢ $s = \dfrac{3a}{2}$

■ **ऊँचाई (Height):**

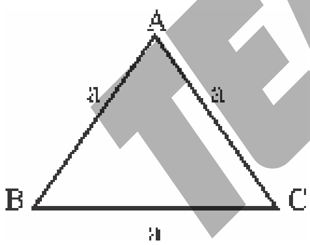
➢



☞ $h = \dfrac{\sqrt{3}}{2}a$

■ **क्षेत्रफल (Area) :**

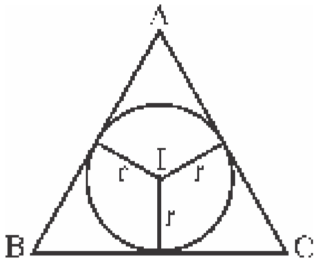
➢



☞ $\Delta = \dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2$

■ **अन्तःवृत्त की त्रिज्या (Inradius):**

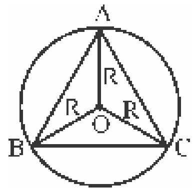
➢



☞ $r = \dfrac{a}{2\sqrt{3}}$ or $r = \dfrac{h}{3}$

■ **बाह्य वृत्त की त्रिज्या (Circumradius):**

➢

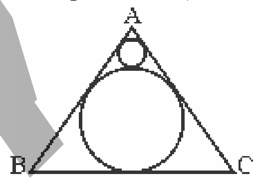


☞ $R = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$ or $R = \dfrac{2h}{3}$

➢ $\dfrac{\text{अंतः वृत्त की त्रिज्या (In-radius)}}{\text{बाह्य वृत्त की त्रिज्या (Circum-radius)}} = \dfrac{r}{R} = \dfrac{1}{2}$

➢ $\dfrac{\text{अंतः वृत्त का क्षेत्रफल (Area of incirle)}}{\text{बाह्य वृत्त का क्षेत्रफल (Area of circumcircle)}} = \dfrac{1}{4}$

➢ समबाहु Δ में (In equilateral Δ),

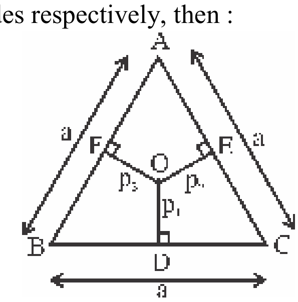


$\dfrac{\text{छोटे वृत्त की त्रिज्या (Radius of smaller circle)}}{\text{बड़े वृत्त की त्रिज्या (Radius of bigger circle)}} = \dfrac{1}{3}$

$\dfrac{\text{छोटे वृत्त का क्षेत्रफल (Area of smaller circle)}}{\text{बड़े वृत्त का क्षेत्रफल (Area of bigger circle)}} = \dfrac{1}{9}$

■ किसी समबाहु त्रिभुज ABC के अन्दर स्थित किसी बिन्दु O से उसकी तीनों भुजाओं पर डाले गये लम्बों की लम्बाइयाँ क्रमशः P_1, P_2 तथा P_3 है तबः

If P_1, P_2 and P_3 are perpendiculars lengths from any interior point "O" of an equilateral ΔABC to all its three sides respectively, then :



समबाहु त्रिभुज की ऊँचाई (height of equilateral triangle)

$\because\ h = P_1 + P_2 + P_3$

तथा/and $h = \dfrac{\sqrt{3}}{2}a$

तब/then, $\dfrac{\sqrt{3}}{2}a = P_1 + P_2 + P_3$

➢ $a = \dfrac{2}{\sqrt{3}}(P_1 + P_2 + P_3)$

TEAM SPY

समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल (Area of equilateral triangle)

$\because \Delta = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

$\Delta = \frac{\sqrt{3}}{4}\left[\frac{2}{\sqrt{3}}(P_1 + P_2 + P_3)\right]^2$

$\Delta = \frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{4}{3}(P_1 + P_2 + P_3)^2$

$\Delta = \frac{1}{\sqrt{3}}(P_1 + P_2 + P_3)^2$

■ **समबाहु त्रिभुज में/In equilateral triangle :**

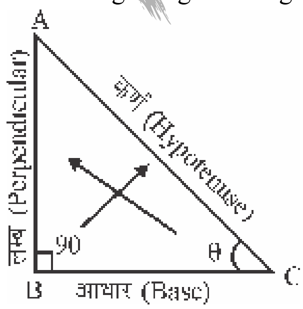
	भुजा/Side	ऊँचाई/Height	क्षेत्रफल/Area
	a	$\frac{\sqrt{3}}{2}a$	$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$
यदि/if a = 2	2	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$
	↓ K	↓ × K	↓ × K^2
	2K	**$\sqrt{3}$K**	**$\sqrt{3}K^2$**

कोणों के आधार पर त्रिभुज के प्रकार (Types of triangles based on angles)

समकोण त्रिभुज (Right Angled Triangle)

■ यदि त्रिभुज का एक कोण समकोण (90°) का होता है। तो Δ समकोण त्रिभुज कहलाता है।

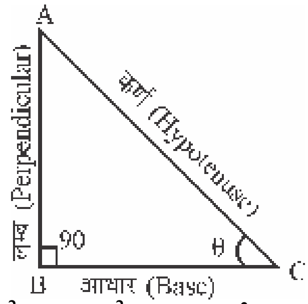
If one angle of a triangle is a right angle, then that triangle is called a right angled triangle.



पाइथागोरस प्रमेय (Pythagoras theorem)

■ समकोण Δ में, कर्ण का वर्ग शेष दो भुजाओं के वर्गों के योगफल के बराबर होता है।

In right angled triangle, the square of the Hypotenuse is equal to the sum of the square of the other two sides.



➢ **$(\text{कर्ण})^2 = (\text{लम्ब})^2 + (\text{आधार})^2$**

➢ **$(\text{Hypotenuse})^2 = (\text{Perpendicular})^2 + (\text{Base})^2$**

➢ **$AC^2 = AB^2 + BC^2$**

■ **पाइथागोरस ट्रिपलेट (Pythagoras Triplets) :**

तीन पूर्णांकों का समूह जो पाइथागोरस प्रमेय को सन्तुष्ट करे।

A set of three integers that satisfy the pythagoras theorem.

Ex.: (3, 4, 5)

➢ यदि (a, b, c) पाइथागोरस ट्रिपलेट है तब (ak, bk, ck)

या/or $\left(\frac{a}{k}, \frac{b}{k}, \frac{c}{k}\right)$ भी पाइथागोरस ट्रिपलेट होंगे।

If (a, b, c) be a pythagoras triplets, then (ak, bk, ck) or $\left(\frac{a}{k}, \frac{b}{k}, \frac{c}{k}\right)$ will also be the pythagoras triplet.

➢ निम्न पाइथागोरस ट्रिपलेट परीक्षाओं में बहुतायत प्रयोग किये जाते हैं-

The following pythagoras triplets are frequently used in examinations :

☞ **(3, 4, 5),** (6, 8, 10), (9, 12, 15), (12, 16, 20), (15, 20, 25), (1.5, 2, 2.5)

☞ **(5, 12, 13),** (10, 24, 26), (2.5, 6, 6.5)

☞ **(7, 24, 25),** (14, 48, 50), (3.5, 12, 12.5)

☞ **(11, 60, 61),** (33, 56, 65), (5.5, 30, 30.5)

☞ (9, 40, 41), (12, 35, 37), (13, 84, 85), (16, 63, 65)

☞ (20, 99, 101), (39, 80, 89), (36, 77, 85), (65, 72, 97)

☞ $(1, 1, \sqrt{2})$, $(1, \sqrt{3}, 2)$

☞ (2ab), $(a^2 - b^2)$, $(a^2 + b^2)$

☞ (2x), $(x^2 - 1)$, $(x^2 + 1)$

☞ (x), $\frac{x^2 - 1}{2}$, $\frac{x^2 + 1}{2}$

त्रिक कैसे प्राप्त करें (How to find Triplet)

■ **विषम संख्या (Odd number) :**

संख्या के वर्ग को ऐसे दो भागों में विभाजित करें जिसका अंतर एक हो-

Divide the square of a number into two parts whose difference is one-

➢ $3 \rightarrow (3)^2 = 9$ → 4, 5

त्रिक (Triplet) → 3, 4, 5

- $5 \rightarrow (5)^2 = 25 \begin{cases} \nearrow 12 \\ \searrow 13 \end{cases}$

त्रिक (Triplet) → 5, 12, 13

- $7 \rightarrow (7)^2 = 49 \begin{cases} \nearrow 24 \\ \searrow 25 \end{cases}$

त्रिक (Triplet) → 7, 24, 25

- $9 \rightarrow (9)^2 = 81 \begin{cases} \nearrow 40 \\ \searrow 41 \end{cases}$

त्रिक (Triplet) → 9, 40, 41

- $11 \rightarrow (11)^2 = 121 \begin{cases} \nearrow 60 \\ \searrow 61 \end{cases}$

त्रिक (Triplet) → 11, 60, 61

- $13 \rightarrow (13)^2 = 169 \begin{cases} \nearrow 84 \\ \searrow 85 \end{cases}$

त्रिक (Triplet) → 13, 84, 85

■ **सम संख्या (Even number) :**

संख्या के वर्ग को दो से विभाजित करके दो भागों में ऐसे विभाजित करें जिनका अंतर दो हो-

Divide the square of a number by two and divide into two parts whose difference is two-

- $4 \rightarrow \frac{(4)^2}{2} = 8 \begin{cases} \nearrow 3 \\ \searrow 5 \end{cases}$

त्रिक (Triplet) → 4, 3, 5

- $6 \rightarrow \frac{(6)^2}{2} = 18 \begin{cases} \nearrow 8 \\ \searrow 10 \end{cases}$

त्रिक (Triplet) → 6, 8, 10

- $8 \rightarrow \frac{(8)^2}{2} = 32 \begin{cases} \nearrow 15 \\ \searrow 17 \end{cases}$

त्रिक (Triplet) → 8, 15, 17

- $10 \rightarrow \frac{(10)^2}{2} = 50 \begin{cases} \nearrow 24 \\ \searrow 26 \end{cases}$

त्रिक (Triplet) → 10, 24, 26

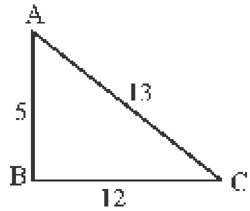
- $12 \rightarrow \frac{(12)^2}{2} = 72 \begin{cases} \nearrow 35 \\ \searrow 37 \end{cases}$

त्रिक (Triplet) → 12, 35, 37

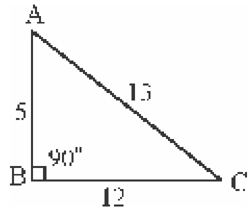
■ **त्रिक का प्रयोग करके क्षेत्रफल निकालना (Find area using triplet) :**

Ex. दिये गये त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी भुजाए 5 cm, 12 cm, 13 cm हैं-

Find the area of given triangle with sides 5 cm, 12 cm, 13 cm :



Sol. ∵ त्रिक (Triplet) → 5, 12, 13



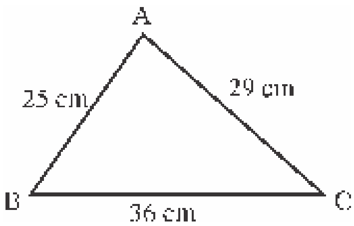
$\Delta = \frac{1}{2} \times AB \times BC$

$= \frac{1}{2} \times 5 \times 12$

$\mathbf{\Delta = 30\ cm^2}$

Ex. दिये गये त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी भुजाए 25 cm, 29 cm, 36 cm हैं-

Find the area of given triangle with sides 25 cm, 29 cm, 36 cm :



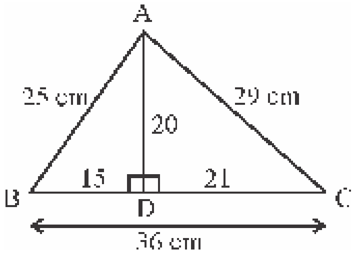
Sol. ∵ भुजाएं (Sides) → 25, 29, 36

↓

(15 + 21)

∴ त्रिक (Triplet) → 21, 20, 29 and 15, 20, 25

उभयनिष्ठ का प्रयोग (Use common triplet)



अतः/hence,

AB = 25, AC = 29, AD = 20, BD = 15, CD = 21

$\Delta = \frac{1}{2} \times BC \times AD$

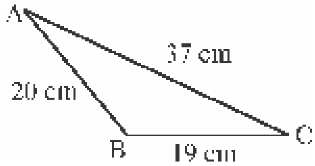
$\Delta = \frac{1}{2} \times 36 \times 20$

$\mathbf{\Delta = 360\,cm^2}$

TEAM SPY

Ex. दिये गये त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी भुजाएं 20 cm, 19 cm, 37 cm हैं-

Find the area of given triangle with sides 20 cm, 19 cm, 37 cm :



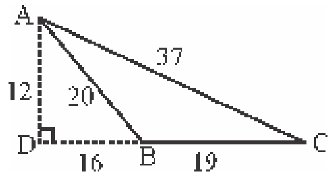
Sol. $\because$ भुजाएं (Sides) $\rightarrow$ 19, 20, 37

$\downarrow$ $\downarrow$

(12 + 16) (12 + 15)

$\therefore$ त्रिक (Triplet) $\rightarrow$ 12, 16, 20 and 12, 15, 37

उभयनिष्ठ का प्रयोग (Use common triplet)



अतः/hence,

AB = 20, AC = 37, BC = 19, AD = 12, BD = 16

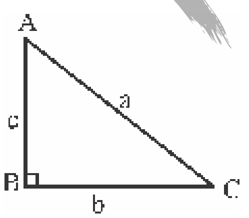
$$\Delta = \frac{1}{2} \times BC \times AD$$

$$\Delta = \frac{1}{2} \times 19 \times 12$$

$$\mathbf{\Delta = 114\,cm^2}$$

■ **विशेषताएं (Properties) :**

1. क्षेत्रफल (Area):



➢ $A = \frac{1}{2} \times$ Base × height

➢ $\mathbf{A = \frac{1}{2} \times b \times c}$

■ **परिमाप (Perimeter):**

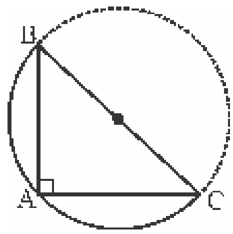
➢ $P = a + b + c$

■ **अर्ध परिमाप (Semi-perimeter):**

➢ $\mathbf{s = \frac{a+b+c}{2}}$

■ अर्धवृत्त पर बना कोण समकोण होता है।

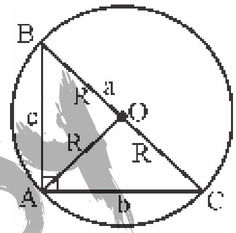
The angle formed on semicircle is a right angle.



☞ भुजा BC = व्यास/त्रिभुज का कर्ण

Side BC = Diameter/Hypotenuse of triangle

■ **वाह्य वृत्त की त्रिज्या/परित्रिज्या (Circumradius):**



☞ भुजा BC = व्यास/त्रिभुज का कर्ण

Side BC = Diameter/Hypotenuse of triangle

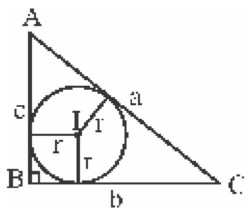
☞ बिन्दु O = परिकेन्द्र (Circumradius)

☞ परित्रिज्या (R) = $\frac{\text{कर्ण}}{2}$

Circumradius (R) = $\frac{\text{Hypotenuse}}{2}$

➢ $\mathbf{R = \frac{a}{2}}$

■ **अन्तः वृत्त की त्रिज्या (In radius):**



I = अंतःकेन्द्र (incentre)

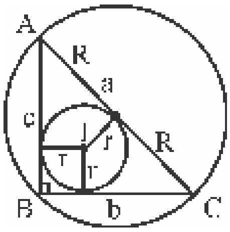
➢ $\mathbf{r = \frac{b+c-a}{2}}$

■ $\because$ $r = \frac{b+c-a}{2}$ & $R = \frac{a}{2}$

$$r + R = \frac{b+c-a}{2} + \frac{a}{2}$$

➢ $\mathbf{r + R = \frac{b+c}{2}}$

■



$\because r = \dfrac{b+c-a}{2}$

a जोड़ने व a घटाने पर-

$r = \dfrac{b+c-a+a-a}{2}$

$r = \dfrac{a+b+c-2a}{2}$

➢ **r = s – a** $\quad \because s = \dfrac{a+b+c}{2}$

$\because R = \dfrac{a}{2} \Rightarrow a = 2R$

➢ **r = s – 2R**

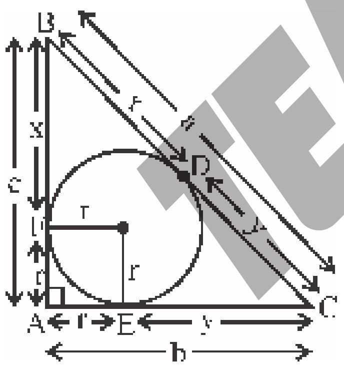
■ $r = \dfrac{\Delta}{s}$

$\Delta = r\,s$

$r = (s - 2R) \qquad s = (r - 2R)$

$\Delta = (s - 2R)s \qquad \Delta = r(r - 2R)$

■



$\because \quad s = \dfrac{a+b+c}{2}$

$s = \dfrac{(x+y)+(r+y)+(r+x)}{2}$

➢ **s = r + x + y**

$\because r = \dfrac{\Delta}{s}$

$r = \dfrac{\Delta}{(r+x+y)} \qquad \{\because s = r + x + y\}$

➢ **Δ = r (r + x + y)**

त्रिभुज ABC में (In right angled Δ ABC),

पाइथागोरस प्रमेय से (By pythgoras theorem),

$(x + r)^2 + (y + r)^2 = (x + y)^2$

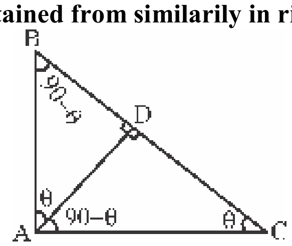
$x^2 + r^2 + 2xr + y^2 + r^2 + 2yr = x^2 + y^2 + 2xy$

$2(r^2 + xr + yr) = 2xy$

$r(r + x + y) = xy$

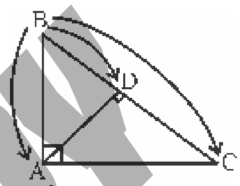
➢ **Δ = xy** $\qquad \{\because \Delta = r\,(r + x + y)\}$

■ **समकोण Δ में समरूपता से प्राप्त परिणाम (Result obtained from similarily in right angled triangle):**



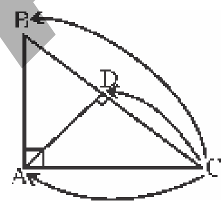
☞ **ΔACB ~ ΔDCA ~ ΔDAB**

➢



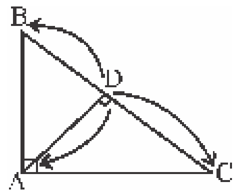
☞ $\mathbf{BA^2 = BD \times BC}$

➢



☞ $\mathbf{CA^2 = CD \times CB}$

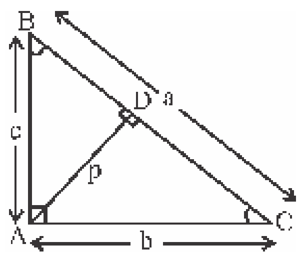
➢



☞ $\mathbf{DA^2 = DB \times DC}$

■ **समकोण Δ में क्षेत्रफल से प्राप्त परिणाम (Result obtained from area in right angled triangle):**

➢



क्षेत्रफल/Area (A) = $\dfrac{1}{2} \times b \times c$ ... (i)

क्षेत्रफल/Area (A) = $\dfrac{1}{2} \times p \times a$ ... (ii)

from equation (i) & (ii)

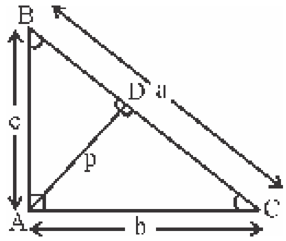
TEAM SPY

$\frac{1}{2} \times b \times c = \frac{1}{2} \times p \times a$

$b \times c = p \times a$

☞ $\mathbf{p = \frac{b \times c}{a}}$

➢



$\because p = \frac{bc}{a}$

$\frac{1}{p} = \frac{a}{bc}$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर (On squaring both sides)-

$\frac{1}{p^2} = \frac{a^2}{b^2c^2}$

Δ ABC में/In Δ ABC

पाइथागोरस प्रमेय से/By Pythaoras theorem

$a^2 = b^2+c^2$

तब/then,

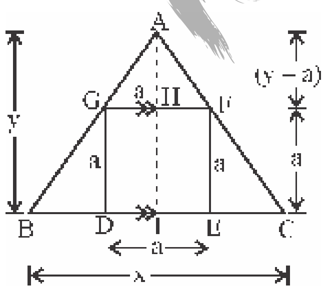
$\frac{1}{p^2} = \frac{b^2+c^2}{b^2c^2}$

$\frac{1}{p^2} = \frac{1}{c^2} + \frac{1}{b^2}$

☞ $\mathbf{\frac{1}{p^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}$

■ **किसी Δ के अन्दर सबसे बड़े वर्ग की भुजा (Side of largest square inside a triangle) :**

➢



$\Delta AGF \sim \Delta ABC$

$\frac{GF}{BC} = \frac{AH}{AI}$

$\frac{a}{x} = \frac{(y-a)}{y}$

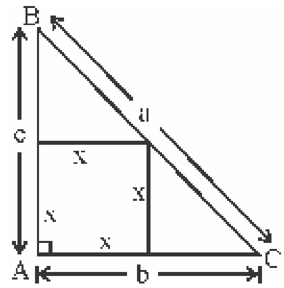
$ay = xy - ax$

$a(x + y) = xy$

☞ $\mathbf{a = \frac{xy}{x+y}}$

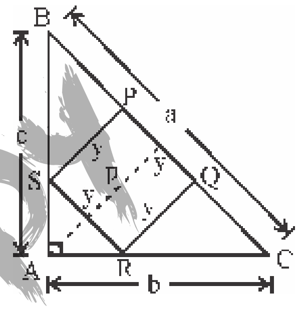
■ **समकोण Δ के अन्दर सबसे बड़े वर्ग की भुजा Side of Largest square inside a right angled triangle:**

➢



☞ **Side of square/वर्ग की भुजा (x) =** $\mathbf{\frac{bc}{b+c}}$

➢



$y = \frac{ap}{a+p}$

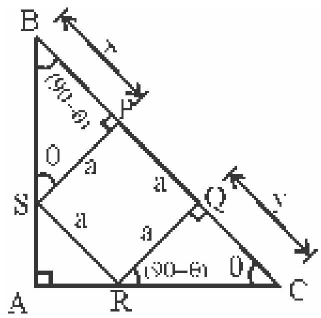
$y = \frac{a \times \frac{bc}{a}}{a + \frac{bc}{a}}$

$y = \frac{bc}{\frac{a^2+bc}{a}}$

$y = \frac{abc}{a^2+bc}$

☞ $\mathbf{y = \frac{abc}{b^2+c^2+bc}}$ $\quad \{\because a^2 = b^2+c^2\}$

➢



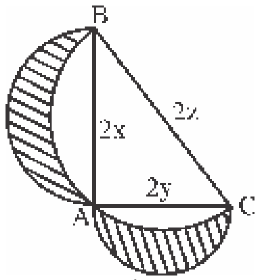
$\Delta BSP \sim \Delta RCQ$

$\frac{a}{y} = \frac{x}{a}$

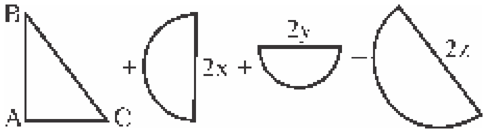
$a^2 = xy$

➢ $\mathbf{a = \sqrt{xy}}$

➤



छायांकित भाग का क्षेत्रफल (Area of shaded region)–



$$\Delta ABC + \frac{\pi x^2}{2} + \frac{\pi y^2}{2} - \frac{\pi z^2}{2}$$

$$\Delta ABC + \frac{\pi}{2}(x^2 + y^2) - \frac{\pi z^2}{2}$$

$$\Delta ABC + \frac{\pi}{2} z^2 - \frac{\pi z^2}{2}$$

ΔABC Area

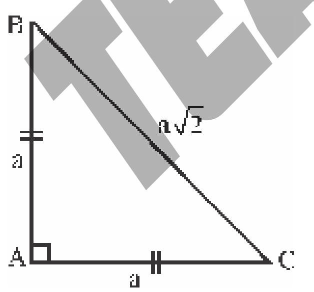
अतः/Hence,

छायांकित भाग का क्षेत्रफल ΔABC का क्षेत्रफल

Area of shaded region = Area of ΔABC :

समद्विबाहु समकोण त्रिभुज (Isosceles right angled trianlge)

➤



➤ **Perimeter (परिमाप) :**

$P = 2a + a\sqrt{2}$

☞ $\mathbf{P = (2 + \sqrt{2})\, a}$

➤ **Area (क्षेत्रफल) :**

$\because \quad A = \frac{1}{2} a^2$

$$A = \frac{1}{2} \frac{P^2}{(2+\sqrt{2})^2} \qquad \left\{\because a = \frac{P}{2+\sqrt{2}}\right\}$$

$$A = \frac{1}{2} \frac{P^2}{(4+2+4\sqrt{2})}$$

$$A = \frac{1}{2} \frac{P^2}{(6+4\sqrt{2})}$$

$$A = \frac{1}{2} \times \frac{P^2}{2(3+2\sqrt{2})}$$

$$A = \frac{1}{4} \times \frac{P^2}{\left(3+2\sqrt{2}\right)}$$

परिमेयकरण करने पर (On rationalization)-

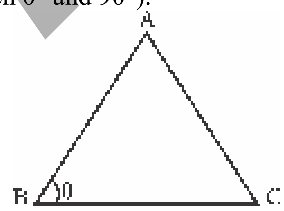
$$A = \frac{1}{4} \times \frac{P^2}{(3+2\sqrt{2})} \times \frac{(3-2\sqrt{2})}{(3-2\sqrt{2})}$$

☞ $\mathbf{A = \frac{1}{4} \times (3-2\sqrt{2})\, P^2}$

न्यूनकोण त्रिभुज (Acute angled triangle)

यदि त्रिभुज के तीनों कोण न्यूनकोण (0° और 90° के बीच में) हो तो त्रिभुज, न्यूनकोण त्रिभुज कहलाता है।

In acute angled triangle is a triangle in which all the interior angles are acute angles (All the three angles are between 0° and 90°).

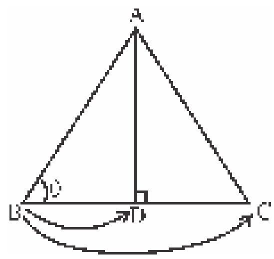


यदि/if $\angle B = \theta$

☞ $\mathbf{CA^2 < AB^2 + BC^2}$

इसी प्रकार अन्य (Similarly for other angles)

■ **न्यूनकोणीय प्रमेय (Acute Angled theorem) :**



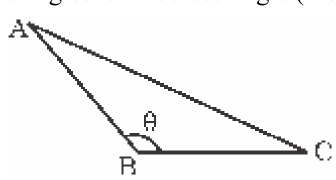
☞ $\mathbf{AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2.BC.BD}$

{इसी प्रकार अन्य/Similarly for other angles}

अधिक कोण त्रिभुज (Obtuse Angled triangle)

➤ यदि किसी त्रिभुज का एक कोण अधिक कोण (90° से अधिक) है तो ऐसा Δ अधिक कोण त्रिभुज कहलाता है।

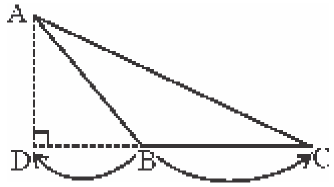
An obtuse angled triangle is a triangle in which any one of the angles is an obtuse angle (more than 90°).



TEAM SPY

- ➢ अधिककोण त्रिभुज में एक कोण ही अधिककोण हो सकता है।
  Only one angle can be an obtuse angle in an obtuse angles triangle.
  ☞ $AC^2 > AB^2 + BC^2$

■ **अधिककोणीय प्रमेय (Obtuse angled theorem) :**



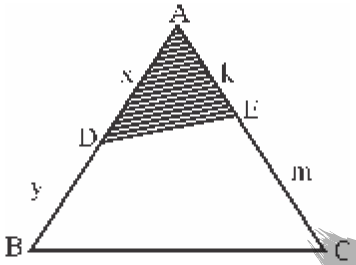
☞ $AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2.BC.BD$

त्रिभुज का क्षेत्रफल निकालना (Find the area of triangle)

■ **जब समरूप न हो (when triangle is not similar) :**

Case: 1

यदि/if AD : DB = x : y & AE : EC = k : m

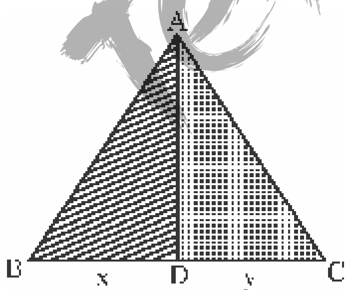


तब/then,

☞ **Area of ΔAED**

$$= \frac{x}{(x+y)} \times \frac{k}{(k+m)} \times \text{Area of } \Delta \text{ ABC}$$

Case: 2



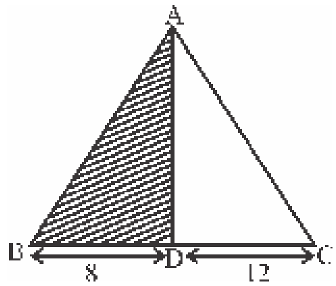
☞ **Area of ΔABD** $= \frac{x}{(x+y)} \times$ **area of Δ ABC**

☞ **Area of ΔACD** $= \frac{y}{(x+y)} \times$ **area of Δ ABC**

Ex. ΔABC का क्षे. 60 इकाई^2 है यदि भुजा BC पर कोई बिन्दु D इस प्रकार है कि BD = 8 इकाई और DC =12 इकाई हो तो Δ ABD का क्षेत्रफल क्या होगा।

Area of ΔABC is 60 Unit^2. If any point D is on the side BC such that BD = 8 unit and DC = 12 unit. Find the area of ΔABD.

Sol.:



Area of ΔABD $= \frac{8}{(8+12)} \times$ area of ΔABC

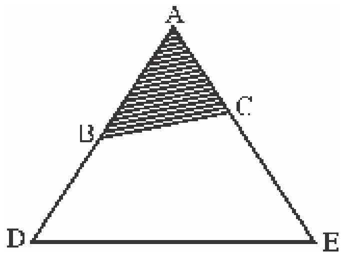
Area of ΔABD $= \frac{8}{(8+12)} \times 60$

$= \frac{8}{20} \times 60$

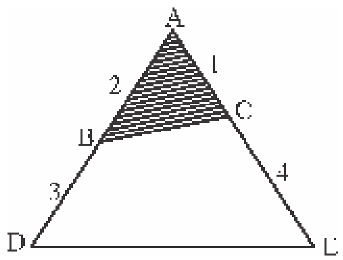
= **24 Unit^2**

Ex. दिये गये चित्र में, ΔADE का क्षेत्रफल 100 इकाई^2 है B और C बिन्दु क्रमशः AD और AE पर है। यदि AB : BD = 2 : 3 और AC : CE = 1 : 4 है। तो Δ ABC का क्षेत्रफल ज्ञात करो?

In the given figure, area of ΔADE is 100 unit^2. Point B and C is on the side AD and AE respectively. If AB : BD = 2 : 3 and AC : CE = 1 : 4. then Area of ΔABC is-



Sol.:



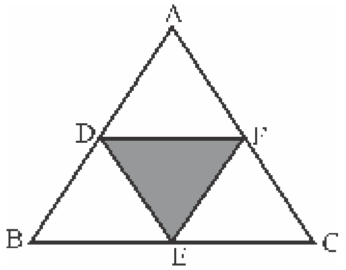
Area of ΔABC $= \frac{2}{5} \times \frac{1}{5} \times$ area of ΔADE

$= \frac{2}{5} \times \frac{1}{5} \times 100$

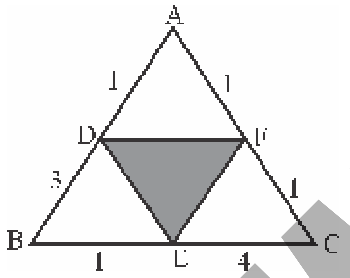
Area of ΔABC = 8 unit^2

Ex. नीचे दिये गये चित्र में, बिन्दु D, E तथा F, ΔABC की भुजाओं को क्रमशः 1 : 3, 1 : 4 और 1 : 1 में विभाजित करते है। तब Δ DEF का क्षेत्रफल तथा ΔABC के क्षेत्रफल का अनुपात ज्ञात कीजिए?

In the given figure, point D, E and F intersect the side of ΔABC 1 : 3, 1 : 4 and 1 : 1 respectively, then find the ratio of area of ΔDEF and area of ΔABC.



Sol.:



Area of $\Delta ADF = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \times \Delta ABC \Rightarrow \frac{1}{8}\Delta ABC$

Area of $\Delta BDE = \frac{1}{5} \times \frac{3}{4} \times \Delta ABC \Rightarrow \frac{3}{20}\Delta ABC$

Area of $\Delta CEF = \frac{1}{2} \times \frac{4}{5} \times \Delta ABC \Rightarrow \frac{2}{5}\Delta ABC$

Area of ΔDEF =

$\Delta ABC - (\Delta ADF + \Delta BDE + \Delta CEF)$

Area of $\Delta DEF = \Delta ABC - (\frac{1}{8} + \frac{3}{20} + \frac{2}{5})\ \Delta ABC$

Area of $\Delta DEF = \Delta ABC \left(1 - \frac{1}{8} - \frac{3}{20} - \frac{2}{5}\right)$

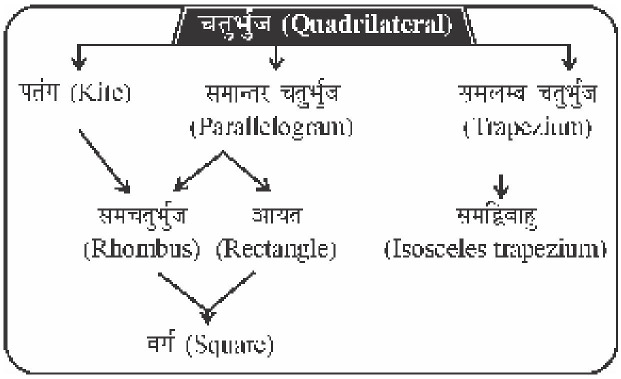
$= \Delta ABC \left(\frac{40-5-6-16}{40}\right)$

$= \Delta ABC \left(\frac{40-27}{40}\right)$

Area of DEF $= \Delta ABC \times \frac{13}{40}$

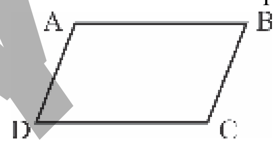
☞ $\frac{\textbf{Area of } \Delta DEF}{\textbf{Area of } \Delta ABC} = \frac{13}{40} \Rightarrow$ **13 : 40**

चतुर्भुज (Quadrilateral)



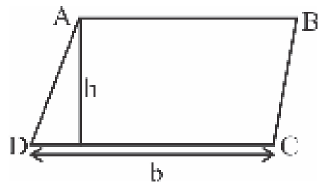
चतुर्भुज (Quadrilateral)

चार भुजाओं से बन्द आकृति को चतुर्भुज कहते हैं/A closed figure with four sides is called a quadrilateral.



■ **चतुर्भुज का क्षेत्रफल (Area of Quadrilateral) :**

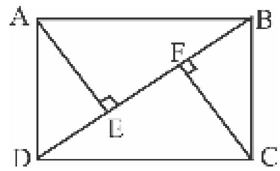
➢



क्षेत्रफल (Area) = आधार (base) × ऊँचाई (height)

$A = b \times h$

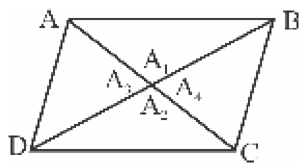
➢



Area of □ ABCD $= \frac{1}{2} \times BD \times (AE + CF)$

➢ यदि ABCD कोई चतुर्भुज है, तथा A_1, A_2, A_3 तथा A_4 क्षेत्रफल है/ If ABCD is any quadrilateral and A_1, A_2, A_3 and A_4 are areas.

तब/then,



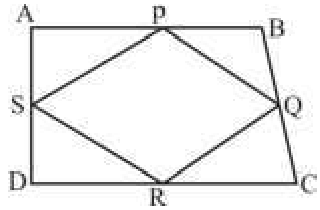
$A_1 \times A_2 = A_3 \times A_4$

TEAM SPY

■ यदि ABCD एक चतुर्भुज है तथा P, Q, R तथा S चतुर्भुज की भुजाओं के मध्य बिन्दु है।

If ABCD is a quadrilateral and P, Q, R and S are the mid points of sides of quadrilateral.

तब/then,

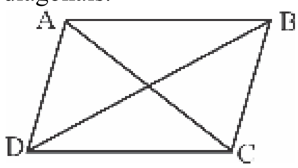


➢ PQRS एक समान्तर चतुर्भुज होगा/PQRS is a parallelogram.

➢ Area of □ PQRS = $\frac{1}{2}$ Area of □ABCD

■ किसी चतुर्भुज का परिमाप उसके विकर्णों के योग से बड़ा होता है।

The perimeter of a quadrilateral is greater than the sum of its diagonals.



AB + BC + CD + DA > AC + BD

पतंग (Kite)

■ ऐसा चतुर्भुज जिसमें समान और आसन्न भुजाओं के दो युग्म होते हैं पतंग कहलाती है।

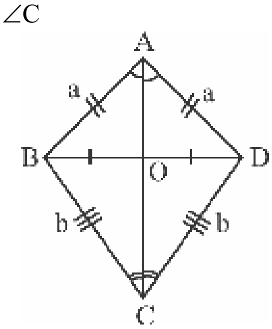
A quadrilateral having equal and adgacent sides in two pairs in called kite.

➢ AB = AD = a

BC = CD = b :

$\angle B = \angle D$

$\angle A \neq \angle C$



➢ AC → बड़ा विकर्ण/larger diagonal (d_1)

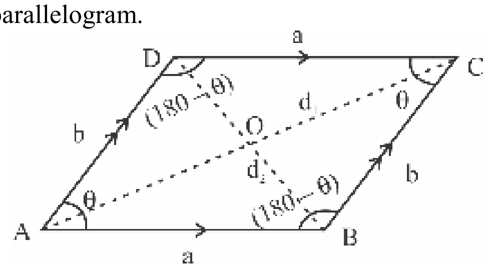
BD → छोटा विकर्ण/Smaller diagonal (d_2)

➢ परिमाप (Perimeter) : P = 2(a + b)

➢ क्षेत्रफल (Area) = $\frac{1}{2} \times d_1 \times d_2$

समान्तर चतुर्भुज (Parallelogram)

■ ऐसा चतुर्भुज, जिसकी विपरीत भुजाऐ समान्तर एवं बराबर हो समान्तर चतुर्भुज कहलाता है।/A quadrilateral which opposite sides are parallel and equal is called a parallelogram.



➢ (i) AB || DC & AD || BC

(ii) AB = DC & AD = BC

(iii) AC = d_1 BD = d_2

➢ सम्मुख कोण बराबर होते है।/Opposite angles are equal.

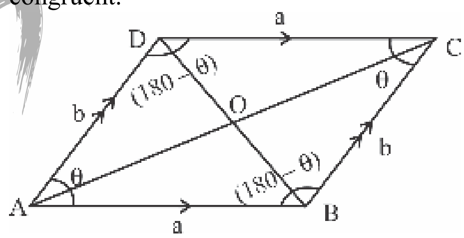
$\angle A = \angle C$ & $\angle B = \angle D$

➢ दो आसन्न कोणों का योग 180° होता है।/Sum of two adjacent angles 180°.

$\angle A + \angle B = 180^o$, $\angle B + \angle C = 180^o$

$\angle C + \angle D = 180^o$, $\angle A + \angle D = 180^o$

➢ विपरीत त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं/Opposite triangles are congruent.



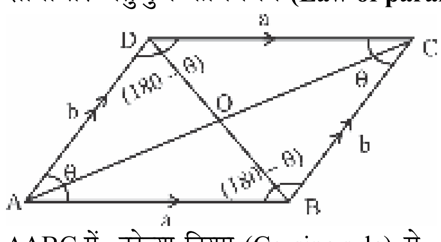
$\Delta ABC \cong \Delta ADC$ & $\Delta DAB \cong \Delta DCB$

➢ सभी चार त्रिभुजों का क्षेत्रफल बराबर होता है।/Area of all four triangles is equal.

Ar ΔAOB = Ar ΔBOC = Ar ΔCOD =

Ar Δ DOA = $\frac{1}{4}$ Ar □ ABCD

➢ **सामान्तर चतुर्भुज का नियम (Law of parallelogram) :**



ΔABC में, कोज्या नियम (Co-sine rule) से–

$d_1^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(180 - \theta)$

$d_1^2 = a^2 + b^2 - 2ab(-\cos\theta)$

$d_1^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\theta$ .....(i)

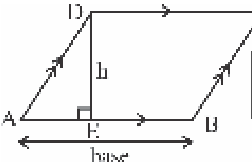
ΔBAD में, कोज्या नियम (Co-sine rule) से–

$d_2^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$ ......(ii)

From eq^n (i) & (ii)

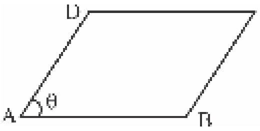
$$d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$$

➢

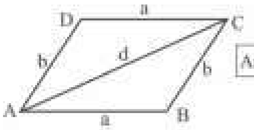


क्षेत्रफल ▱ ABCD = आधार × ऊँचाई
Area ▱ ABCD = Base × Height

➢



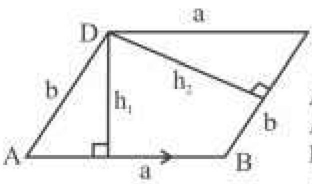
Area ▱ ABCD = AB × AD sin θ



Area ▱ ABCD = $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-d)}$

$\left\{\text{Where, } s = \frac{a+b+d}{2}\right\}$

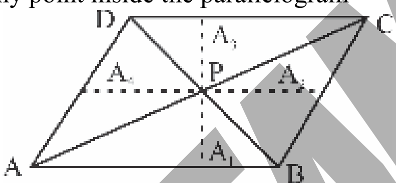
➢



Area = a × h_1 .....(i)
Area = b × h_2 .....(ii)
From eqⁿ (i) & (ii)

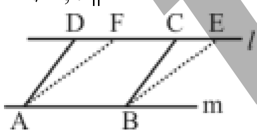
$a \times h_1 = b \times h_2$

➢ समान्तर चतुर्भुज के अन्दर कोई बिन्दु P हो-
P is any point inside the parallelogram-



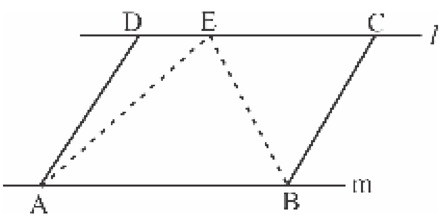
$(A_1 + A_3) = (A_2 + A_4) = \frac{1}{2} \times$Area ||gm ABCD

➢ यदि/If, $l \parallel m$



Area ||gm ABCD = Area ||gm ABEF

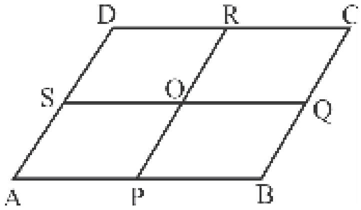
➢



Area Δ ABE $= \frac{1}{2} \times$ ||gm ABCD

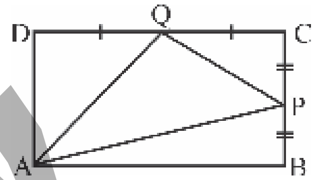
➢ यदि P, Q, R और S भुजाओं के मध्य बिन्दु हो/If P, Q, R and S are the mid points of sides.

तब/then,



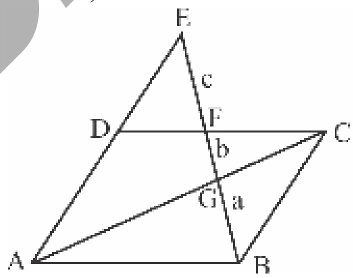
Area ▱ APOS = Area ▱ POQB = Area ▱ QORC
$= \text{Area} ▱ \text{ ROSD} = \frac{1}{4}$ Area ▱ ABCD

➢



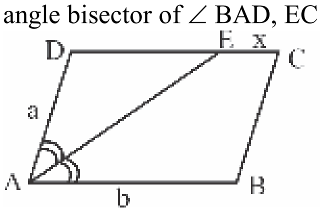
$\frac{\text{Area } \Delta APQ}{\text{Area} \parallel gmABCD} = \frac{3}{8}$

➢ यदि ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है/If ABCD is a parallelogram, BG = a, GF = b FE = C
तब/then,



$a^2 = b^2 + bc$

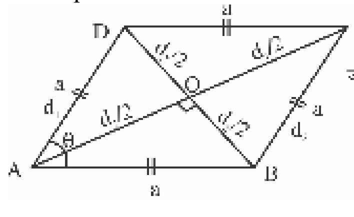
➢ यदि AE, ∠BAD का कोण समद्विभाजक है/If AE is the angle bisector of ∠ BAD, EC = x



x = b – a

समचतुर्भुज (Rhombus)

■ ऐसा समान्तर चतुर्भुज जिसकी चारो भुजाऐ बराबर हो समचतुर्भुज कहलाता है।/A parallelogram which all four sides are equal is called a rhombus.



जहाँ/Where,
AC = d_1 › बड़ा विकर्ण (Larger diagonal)
BD = d_2 › छोटा विकर्ण (Smaller diagonal)

AB = BC = CD = DA = a

➢ समचतुर्भुज के विकर्ण एक दूसरे को समकोण पर समद्विभाजित करते है।

The diagonals of a rhombus bisect each other at right angled.

➢ $\boxed{d_1^2 + d_2^2 = 4a^2}$

➢ (i) $\boxed{\text{Area} = \frac{1}{2} \times d_1 \times d_2}$

(ii) $\boxed{\text{Area} = a^2 \sin\theta}$

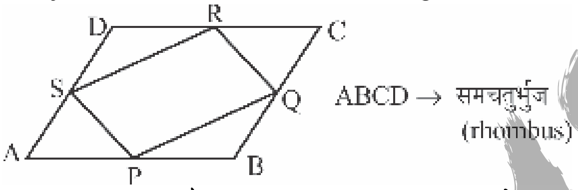
➢ समचतुर्भुज की ऊँचाई/Hight of rhombus

$$\boxed{H = \frac{d_1 d_2}{\sqrt{d_1^2 + d_2^2}}}$$

➢ Perimeter परिमाप $\boxed{P = 4a}$

➢ समचतुर्भुज की भुजाओ के मध्य बिन्दुओ को मिलाने से बनी आकृति आयत होती है।

Figure formed by joining the mid-points of the adjacent sides of a rhombus is rectangle.



यदि P, Q, R और S, AB, BC, CD तथा AD के क्रमशः मध्य बिन्दु हैं।

If P, Q, R and S are the mid point of AB, BC, CD and AD respectively

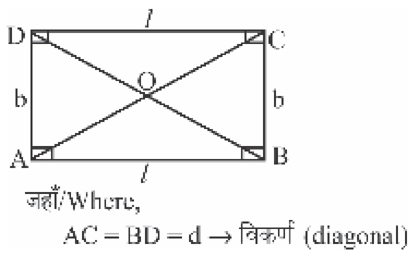
अतः PQRS एक आयत है।

Therefore PQRS is a rectangle.

आयत (Rectangle)

■ ऐसा समान्तर चतुर्भुज जिसका प्रत्येक कोण 90° हो, आयत कहलाता है।

A parallelogram which each angle is 90° is called rectangle.



$\boxed{\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90^\circ}$

➢ परिमाप (Perimeter) $\boxed{P = 2(l + b)}$

➢ क्षेत्रफल (Area) $\boxed{A = l \times b}$

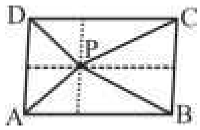
➢ (i) विकर्ण (Diagonal) $\boxed{d = \sqrt{l^2 + b^2}}$

(ii) विकर्ण बराबर तथा एक-दूसरे को समद्विभाजित करते हैं परन्तु समकोण पर नहीं।

Diagonals are equal and bisect each other but not at right angled.

➢ यदि P आयत/वर्ग के अन्दर कोई बिन्दु हो/If P is any point in side the rectangle/square.

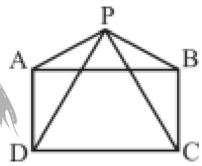
तब/then,



$\boxed{PA^2 + PC^2 = PB^2 + PD^2}$

➢ यदि P आयत/वर्ग के बाहर कोई बिन्दु हो/If P is any point out side the rectangle/square

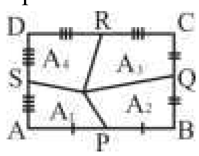
तब/then,



$\boxed{PA^2 + PC^2 = PB^2 + PD^2}$

➢ ABCD एक आयत/वर्ग है तथा P, Q, R तथा S संबंधित भुजाओं के मध्य बिन्दु है।

ABCD is a rectangle/square and P,Q,R and S are mid points of respective sides.

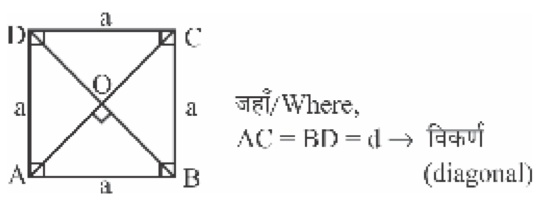


$\boxed{(A_1 + A_3) = (A_2 + A_4) = \frac{1}{2} \times \square \text{ ABCD Area}}$

वर्ग (Square)

■ ऐसा समान्तर चतुर्भुज जिसके सभी चारों कोण और चारों भुजाएं आपस में बराबर हो, वर्ग कहलाता है।

Such a parallelogram which all four angles and four sides are equal each other is called a square.

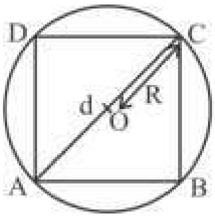


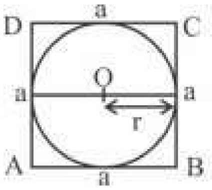
➢ $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90^\circ$

AB = BC = CD = AD = a

➢ विकर्ण बराबर एवं एक-दूसरे को समकोण पर समद्विभाजित करते हैं।

Diagonals are equal and bisect each other at right angled.

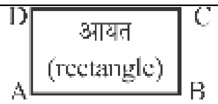
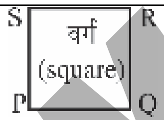
- $\boxed{d = a\sqrt{2}}$
- परिमाप (perimeter) $\boxed{P = 4a}$
- $\boxed{\text{क्षेत्रफल (Area)} = a^2}$
- $\boxed{A = \frac{d^2}{\sqrt{2}}}$
- 

$\boxed{R = \frac{d}{2}}$
- 

$\boxed{r = \frac{a}{2}}$

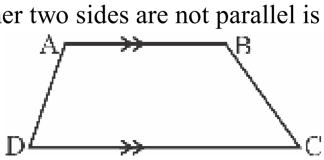
आयत और वर्ग के परिमाप और क्षेत्रफलों की असमिका

(Enequality of perimeter and areas of rectangle and square) :

	
परिमाप (Perimeter) $= P_1$ क्षेत्रफल (Area) $= A_1$	परिमाप (Perimeter) $= P_2$ क्षेत्रफल (Area) $= A_2$
☞ यदि/If $P_1 = P_2$ तब/then $A_1 < A_2$ ☞ यदि/If $A_1 = A_2$ तब/then $P_1 > P_2$	

समलम्ब चतुर्भुज (Trapezium)

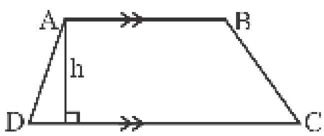
■ ऐसा चतुर्भुज जिसकी दो भुजाएं समान्तर हो तथा अन्य दो भुजाऐ समान्तर न हो समलम्ब चतुर्भुज कहलाता है।
A quadrilateral which two sides are parallel and the other two sides are not parallel is called a trapezium.



AB || DC
AD ∦ BC

- Area (क्षेत्रफल) $\frac{1}{2}$ ×(sum of parallel sides × height)

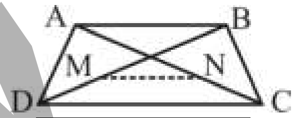
$A = \frac{1}{2} \times (AB + DC) \times h$



- यदि M और N, भुजा AD और BC के क्रमशः मध्यबिन्दु हैं/If M and N are the mid points of sides AD and BC respectively,
तब/then,

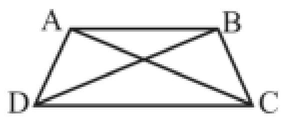
$\boxed{MN = \frac{1}{2}(AB + DC)}$

- यदि M और N, विकर्ण BD और AC के क्रमशः मध्यबिन्दु हैं/If M and N are the mid points of diagonals BD and AC respectively,
तब/then,

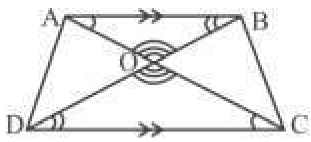


$\boxed{MN = \frac{1}{2}(DC - AB)}$

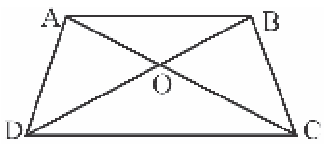
- भुजाओं और विकर्णों में सम्बन्ध (Relation between sides & diagonals)



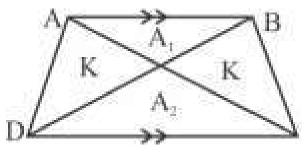
$\boxed{AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2 + 2 \times AB \times CD}$

- 

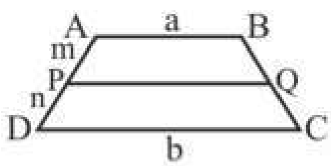
$\because \Delta AOB \sim \Delta COD$
$\therefore \frac{AO}{OC} = \frac{BO}{OD} = \frac{AB}{DC}$

- 

Area of AOD = Area of BOC

- 

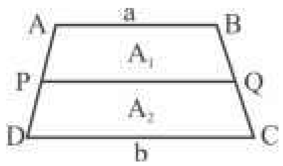
$\boxed{K = \sqrt{A_1 A_2}}$

- 

$\boxed{PQ = \frac{an + bm}{n + m}}$

TEAM SPY

➢



$$\frac{\text{Area}\square\ ABQP}{\text{Area}\square\ PQCD} = \frac{A_1}{A_2}$$

➢ $PQ = \sqrt{\frac{A_1b^2 + A_2a^2}{A_1 + A_2}}$

➢ यदि/If $A_1 = A_2$

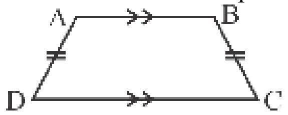
तब/then,

$$PQ = \sqrt{\frac{b^2 + a^2}{2}}$$

समद्विबाहु समलम्ब (Isosceles Trapezium)

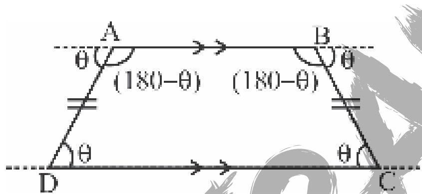
■ ऐसा समलम्ब चतुर्भुज जिसकी असमान्तर भुजाऐ बराबर हो समद्विबाहु समलम्ब कहलाता है।

A trapezium which non-parallel sides are equal is called an isosceles trapezium.



AB || DC & AD = BC

➢



$\angle D = \angle C, \angle A = \angle B$
AB || DC & AD = BC
तब/then,
$\angle A + \angle C = 180^o$ & $\angle B + \angle D = 180^o$
$\angle A + \angle D = 180^o$ & $\angle B + \angle C = 180^o$

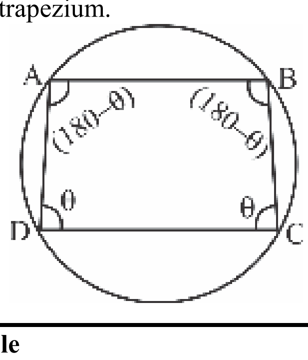
➢ प्रत्येक समद्विबाहु समलम्ब चतुर्भुज एक चक्रीय चतुर्भुज होता है।

Each isosceles trapezium is a cyclic quadrilateral.

अथवा/or

यदि एक समलम्ब वृत्त में बना हुआ तो यह समद्विबाहु समलम्ब होगा।

If a trapezium is inscribed in a circle it must be a isosceles trapezium.

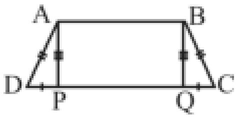


☞ चक्रीय चतुर्भुज में, आमने-सामने के कोणों का योग 180^o होता है।/

In cyclic quadrilateral, the sum of the opposite angle is 180^o.

$\angle A + \angle C = 180^o$ & $\angle B + \angle D = 180^o$

➢

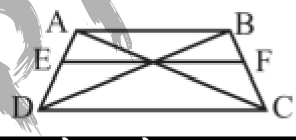


$\Delta APD \cong \Delta BQC$

$$DP = QC = \frac{DC - AB}{2}$$

➢ समद्विबाहु समलम्ब चतुर्भुज के विकर्णों के प्रतिच्छेद से होकर गुजरने वाले समान्तर रेखा खण्ड (EF) की लम्बाई :

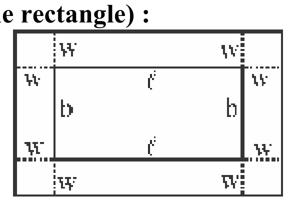
The length of a parallel line segment (EF) through the intersection of diagonals of the isosceles trapezium is :



$$EF = \frac{2.AB.CD}{AB + CD}$$

रास्ते का क्षेत्रफल (Area of Path)

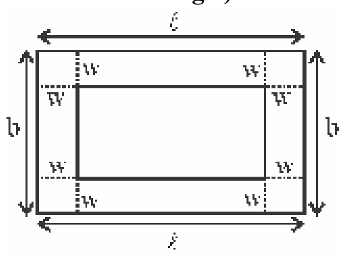
■ **आयत के परितः एक समान चौड़ाई 'w' वाले रास्ते का क्षेत्रफल (Area of the path of uniform width 'w' all around the rectangle) :**



रास्ते का क्षेत्रफल (Area of Path) $= (\ell + 2w)(b + 2w) - \ell b$
$= \ell b + 2\ell w + 2bw + 4w^2 - \ell b$
$= 2\ell w + 2bw + 4w^2$

➢ **रास्ते का क्षेत्रफल (Area of Path) = $2w(\ell + b + 2w)$**

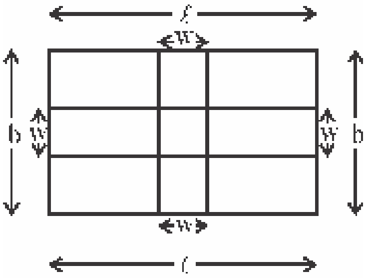
■ **आयत के अन्दर एक समान चौड़ाई 'w' वाले रास्ते का क्षेत्रफल (Area of the path of uniform width 'w' all around inside the rectangle) :**



रास्ते का क्षेत्रफल (Area of Path) $= \ell b - [(\ell - 2w)(b - 2w)$
$= \ell b - [\ell b - 2\ell w - 2bw + 4w^2]$
$= \ell b - \ell b + 2\ell w + 2bw - 4w^2$

➢ **रास्ते का क्षेत्रफल (Area of Path) = $2w[\ell + b - 2w]$**

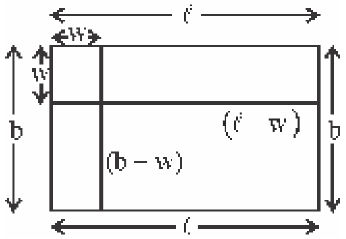
■ **लम्बाई और चौड़ाई के अनुदिश एक समान चौड़ाई 'w' के पथ का क्षेत्रफल (Area of the path of uniform width 'w' along the length and the breadth) :**



रास्ते का क्षेत्रफल (Area of Path) = $\ell \times w + b \times w - w^2$

$$\mathbf{A = w(\ell + b - w)}$$

या/OR



रास्ते का क्षेत्रफल (Area of Path)

$= \ell \times b - [(\ell - w)(b - w)]$

$= \ell b - [\ell b - \ell w - bw + w^2)$

➢ $\mathbf{A = w[\ell + b - w)}$

■ यदि (x × y) आयाम की n आयताकार टाइल्स ($\ell \times b$) आयाम की फर्श को ढकती है।

If n rectangular tiles of dimension (x × y) cover the floor of dimension ($\ell \times b$).

$n \times (x \times y) = \ell \times b$

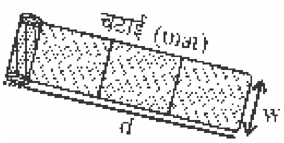
अतः/hence, टाइल्सों की संख्या (No. of tiles)

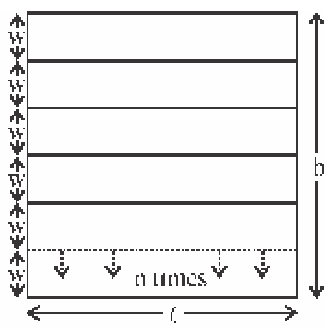
➢ $\mathbf{n = \dfrac{\ell \times b}{x \times y}}$

■ यदि फर्श को न्यूनतम संख्या की वर्गाकार टाइल्स द्वारा पूरी तरह से ढका गया हो तो वर्गाकार टाइल्स की भुजा की लम्बाई तथा चौड़ाई का म.स.प. होगी–

If floor covers by minimum number of squre tiles exactly fit then side of square tile will be HCF of length and breadth of floor

■ जब कालीन की लम्बाई निश्चित हो (When Carpet has fixed width)





चटाई की लम्बाई/length of mat = d	फर्श की लम्बाई/length of floor = ℓ
चटाई की चौड़ाई/width of mat = w	फर्श की चौड़ाई/width of floor = b

अतः/hence,

चटाई का क्षेत्रफल = फर्श का क्षेत्रफल

Area of mat = Area of Floor

➢ $\mathbf{d \times w = \ell \times b}$

■ **यदि चटाई को फर्श पर n बार में बिछाया जाए**

If the mat is spread n times on the floor

लम्बाई के साथ/with the length,

➢ चटाई को एक बार बिछाने पर फर्श का क्षेत्रफल/Area of the floor when the mat is spread one time = $\ell \times w$

➢ चटाई को n बार बिछाने पर फर्श का क्षेत्रफल/ Area of the floor when the mat is spread n times = $n \times \ell \times w$

चौड़ाई के साथ/with the width,

➢ चटाई को एक बार बिछाने पर फर्श का क्षेत्रफल/Area of the floor when the mat is spread one time = b × w

➢ चटाई को n बार बिछाने पर फर्श का क्षेत्रफल/ Area of the floor when the mat is spread n times = n × b × w

बहुभुज (Polygon)

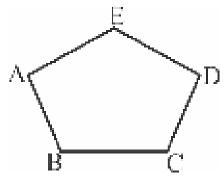
■ तीन या तीन से अधिक भुजाओं से बन्द आकृति को बहुभुज कहते हैं।

A closed figure with three or more sides is called a polygon.

नियमित बहुभुज (Regular polygon)

➢ ऐसा उत्तल बहुभुज जिसकी प्रत्येक भुजा बराबर हो।/A convex polygon in which each side is equal

➢ प्रत्येक आन्तरिक बराबर हो।/Each interior angle is equal.



➢	सभी आन्तरिक कोणों का योगफल (Sum of all interior angles)	$(2n-4) \times \frac{\pi}{2}$
➢	प्रत्येक आन्तरिक कोण (Each interior angle)	$\frac{(2n-4)}{n} \times \frac{\pi}{2}$
➢	सभी बाह्य कोणो का योगफल (Sum of all exterior angles)	360
➢	प्रत्येक बाह्य कोण (Each exterior angle)	$\frac{360}{n}$
➢	आंतरिक कोण + बाह्य कोण (Interior angle + exterior angle)	180°

TEAM SRV

➢	समबहुभुज का परिमाप (Perimeter of regular polygon)	$n \times a$
➢	अंतः त्रिज्या/Inradius (r)	$\frac{a}{2}\text{Cot}\frac{\pi}{n}$
➢	बाह्य त्रिज्या/Circum radius (R)	$\frac{a}{2}\text{cosec}\frac{\pi}{n}$
➢	अंतः त्रिज्या और बाह्य त्रिज्या का अनुपात/Ratio of inradius and circum radius (r : R)	$\cos\frac{\pi}{n}$
➢	क्षेत्रफल (Area)	$\frac{na^2}{4}\cot\frac{180}{n}$
➢	क्षेत्रफल (Area)	$\frac{n}{2}R^2\sin\frac{360}{n}$

विकर्ण (Diagonal) :

➢ यदि हम किसी बहुभुज की दो असंगत शीर्षों को मिलाये तो यह विकर्ण कहलाता है।
If we join any two (non adjacent) vertex of a polygon then that is a diagonal.

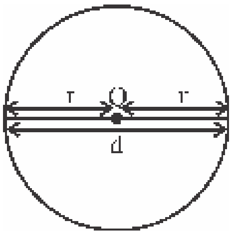
विकर्णों की संख्या (No of diagonals) = $\frac{n(n-3)}{2}$

☞ **चतुर्भुज और बहुभुज का विस्तारपूर्वक अध्ययन ज्यामिति अध्याय से करें।**
Study quadrilateral and polygon in detail from geometry chapter.

वृत्त (Circle)

■ किसी एक निश्चित बिन्दु से समान दूरी पर स्थित बिन्दुओं का बिन्दुपथ वृत्त कहलाता है। यह निश्चित बिन्दु, वृत्त का केन्द्र कहलाता है।
The locus of points equidistant from a fixed point is called the center of the circle.

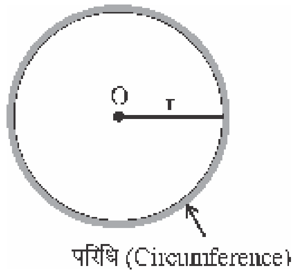
➢ वृत्त का स्थान उन सभी बिन्दुओं का समुच्चय है जो एक निश्चित बिन्दु से एक निश्चित दूरी पर है।
The locus of a circle is the set of all points that are a fixed distance from a fixed point.



➢ त्रिज्या/Radius = r

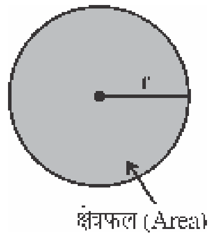
➢ व्यास/Diameter (d) = 2r

➢ **परिधि/Circumference :**



☞ **$C = 2\pi r$**

➢ **क्षेत्रफल/Area :**



☞ **$(A) = \pi r^2$**

➢ $\because C = 2\pi r$

$\frac{C}{2r} = \pi \Rightarrow \frac{C}{d} = \pi$ (नियतांक/Constant)

☞ **$\frac{\text{परिधि (Circumference)}}{\text{व्यास (diameter)}} = \pi\text{(constant)}$**

➢ **वृत्त की परिधि तथा क्षेत्रफल में सम्बन्ध/Relation between circumference and Area of circle :**

$\because C = 2\pi r$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर/Square on both sides-

$C^2 = 4\pi^2 r^2$

$C^2 = 4\pi\,(\pi r^2)$

☞ **$C^2 = 4\pi A$**

✍ $\frac{22}{7}$ एक परिमेय संख्या है जबकि π एक अपरिमेय संख्या है।
$\frac{22}{7}$ is a rational number whereas π is an irrational number.

➢ **त्रिज्या, परिधि और क्षेत्रफल में सम्बन्ध/Relation among radius, circumference and area**

Radius (r)	**$C = 2\pi r$**	**$A = \pi r^2$**
$7 \times 1 = 7$	44	154
$7 \times 2 = 14$	44×2	$154 \times (2)^2$
$7 \times 3 = 21$	44×3	$154 \times (3)^2$
$7 \times 4 = 28$	44×4	$154 \times (4)^2$
$7 \times 5 = 35$	44×5	$154 \times (5)^2$
$7 \times \frac{1}{2} = 3.5$	$44 \times \frac{1}{2}$	$154 \times \frac{1}{2}^{2}$
$7 \times \frac{1}{4} = 1.75$	$44 \times \frac{1}{4}$	$154 \times \frac{1}{4}^{2}$
7K	44K	$154K^2$

☞ **परिधि के लिए/For circumference,**

$\because C = 2\pi r \quad 2\times\frac{22}{7}\times r \quad 2\times\ \frac{2\times 11}{7}\ \times r$

$= 2\times\ \frac{2}{7}\times 11\ \times r$

क्षेत्रफल के लिए/For area,

$\because\ A = \pi r^2 = \frac{22}{7}r^2 \quad 2\times\ \frac{2\times 11}{7} \quad r \quad r$

$= \ \frac{2}{7}\times 11\ \times r\times r$

अतः "यदि त्रिज्या 7 का गुणज है तो परिधि तथा क्षेत्रफल 11 का गुणज अवश्य होगे।" तब विकल्प में 11 की विभाजिता लगाकर उत्तर प्राप्त कर सकते है।

Hence, If radius is multiple of 7. Then circumference and Area must be multiple of 11. Then we can get the answer using the divisibility of 11 in the options.

Ex. :

यदि/If r = 7K

तब परिधि/then circumference,

$\because C = 2\pi r$

$C = 2\pi \times 7K$

$C = 2\times\frac{22}{7}\times 7K$

C = 44K

अतः C = 44K, 11 से पूर्णतः विभाजित होगा।

Hence, C = 44K is completely divisible by 11.

Ex. :

यदि/If r = 7K

तब क्षेत्रफल/then area,

$\because\ A = \pi r^2$

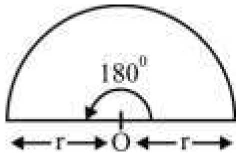
$A = 2\times\frac{22}{7}\times(7K)^2$

A = 154K

अतः A = 154K, 11 से पूर्णतः विभाजित होगा।

Hence, A = 154K is completely divisible by 11.

अर्धवृत्त (Semi-Circle)



➢ **परिधि (Circum ference) :**

$C = \frac{1}{2}\times 2\pi r + 2r$

$C = \pi r + 2r$

☞ **C = r (π + 2)**

(OR)

$\because C = r(\pi + 2)$

$C = r\left(\frac{22}{7}+2\right)$

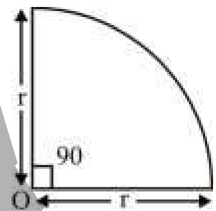
$C = r\left(\frac{36}{7}\right)$

☞ $\mathbf{C = \frac{36}{7}r}$

➢ **क्षेत्रफल (Area) :**

☞ $\mathbf{A = \frac{1}{2}\pi r^2}$

चतुर्थांश (Quadrant)



➢ **परिधि (Circumference) :**

$C = \frac{1}{4}\times 2\pi r + 2r$

$C = \frac{\pi r}{2} + 2r$

☞ $\mathbf{C = r\ \ \frac{\pi}{2} + 2}$

OR

$\because\ C = r\ \ \frac{\pi}{2} + 2$

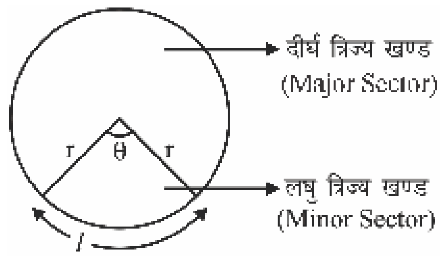
$C = r\left[\frac{22}{7}\times\frac{1}{2}+2\right]$

$C = r\left[\frac{11}{7}+2\right]$

$C = r\left[\frac{25}{7}\right]$

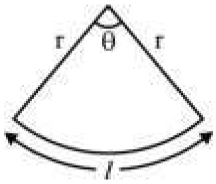
☞ $\mathbf{C = \frac{25}{7}r}$

दीर्घ त्रिज्य खण्ड और लघु त्रिज्य खण्ड (Major Sector & Minor Sector)



TEAM SPY

त्रिज्य खण्ड का क्षे0 (Area of Sector) :



☞ $\mathbf{A = \frac{\theta}{360} \times \pi r^2}$

चाप की लम्बाई (Length of arc) –:

☞ $\mathbf{l = \frac{\theta}{360} \times 2\pi r}$

त्रिज्य खण्ड की परिधि (Circumference of Sector) :

☞ $\mathbf{C = \frac{\theta}{360} \times 2\pi r + 2r}$

➢ $\because A = \frac{\theta}{360} \times \pi r^2$

2 का गुणा और 2 का भाग करने पर/Multiplying 2 and dividing by2 -

$A = \frac{1}{2}\left[\frac{\theta}{360} \times 2\pi r^2\right]$

$A = \frac{1}{2}\left[\frac{\theta}{360} \times 2\pi r\right] r$

☞ $\mathbf{A = \frac{1}{2} \times l \times r}$ $\because \ell = \frac{\theta}{360} \times 2\pi r$

➢ $\because l = \frac{\theta}{360} \times 2\pi r$

$l = \frac{\theta}{2\pi} \times 2\pi r$ $\because 2\pi = 360$ लेने पर θ रेडियन में होगा

☞ $\mathbf{l = r\,\theta}$

➢ $\because 180^0 = \pi^c$

$\therefore 1° = \left(\frac{\pi}{180}\right)^c$

☞ $\mathbf{\theta^0 = \frac{\pi}{180} \times \theta}^c$

➢ $\pi^c = 180^0$

$1^c = \frac{180}{\pi}^0$

☞ $\mathbf{\theta^c = \frac{180}{\pi} \times \theta}^0$

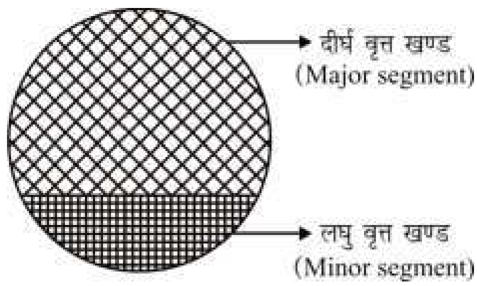
➢ $\because \theta^c = \frac{180}{\pi} \times \theta^0$

$1^c = \frac{180}{\pi} \times 1^0$

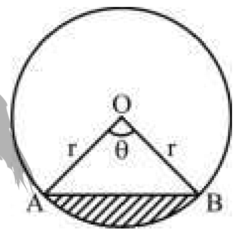
$1^c = \frac{180}{22} \times 7^0$

☞ $\mathbf{1^c = 57°16'22''}$

लघु वृत्त खण्ड और दीर्घ वृत्त खण्ड
(Minor segment & Major segment)



➢ **लघु वृत्त खण्ड/Minor segment-**

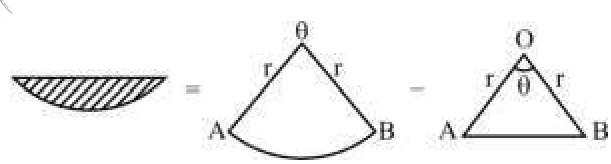


☞ लघु वृत्त खण्ड का क्षेत्रफल

= त्रिज्य खण्ड AOB का क्षेत्रफल –त्रिभुज AOB का क्षेत्रफल

Area of minor segment

= Area of sector AOB – Area of Δ AOB



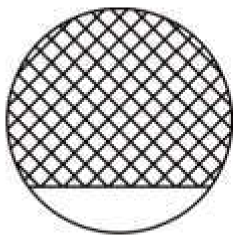
लघु वृत्त खण्ड का क्षेत्रफल/Area of minor segment

$= \frac{\theta}{360}\pi r^2 - \frac{1}{2}r^2\sin\theta$

☞ **लघु वृत्त खण्ड का क्षेत्रफल/Area of minor segment**

$\mathbf{= r^2 \; \frac{\theta}{360}\pi - \frac{\sin\theta}{2}}$

➢ **दीर्घ वृत्त खण्ड का क्षेत्रफल/Area of major segment-**



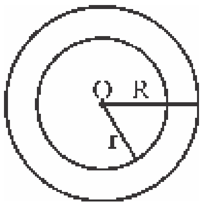
☞ दीर्घ वृत्त खण्ड का क्षेत्रफल

= वृत्त का क्षेत्रफल – लघुवृत्त खण्ड का क्षेत्रफल

Area of major segment

= Area of circle – Area of minor segment

दो संकेन्द्रीय वृत्तों द्वारा घेरा गया क्षेत्रफल (Area enclosed by two concentric circle)



➢ **क्षेत्रफल (Area) –**

$A = \pi R^2 - \pi r^2$

☞ $\mathbf{A = \pi (R^2 - r^2)}$

➢ रास्ते की चौड़ाई (Width of Path) :

☞ $\mathbf{w = R - r}$

➢ $\because W = R - r$

दोनों पक्षों में 2π से गुणा करने पर/Multiplying by 2π in both side-

$2\pi w = 2\pi R - 2\pi R$

$2\pi w =$ बाह्य परिधि – अंतः परिधि

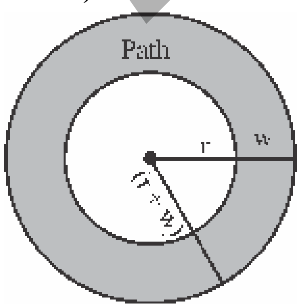
= Outer circumference – Inner circumference

☞ $\mathbf{w = \dfrac{\text{बाह्य परिधि} - \text{अन्तः परिधि}}{2\pi}}$

$\mathbf{w = \dfrac{\text{Outer circumference - Inner circumference}}{2\pi}}$

वृत्ताकार सड़क का क्षेत्रफल (Area of circular road)

■ **जब सड़क वृत्त के बाहर की ओर हो (when the path is outside the circle)-**



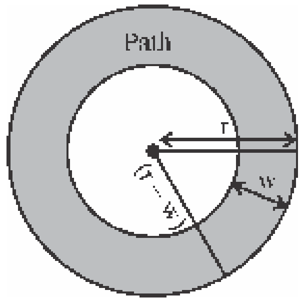
$A = \pi(r + w)^2 - \pi r^2$

$A = \pi(r^2 + w^2 + 2rw) - \pi r^2$

$A = \pi r^2 + \pi w^2 + 2\pi rw - \pi r^2$

☞ $A = \mathbf{\pi w(2r + w)}$

■ **जब सड़क वृत्त के अन्दर की ओर हो (when the path is inside the circle)–**



$A = \pi r^2 - \pi(r - w)^2$

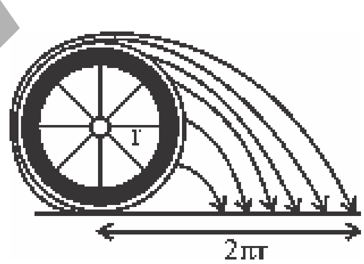
$A = \pi r^2 - \pi(r^2 + w^2 - 2rw)$

$A = \pi r^2 - \pi r^2 - \pi w^2 + 2\pi rw$

$A = -\pi w^2 + 2\pi rw$

☞ $\mathbf{A = \pi w(2r - w)}$

घूमता हुआ पहिया (Rotating wheel)



☞ 1 चक्कर में चली गयी दूरी = वृत्त की परिधि

Distance covered by one cycle

= circumference of circle

☞ लगाए गए चक्करों की संख्या (n) × परिधि

= चली गई कुल दूरी

Number of cycles taken (n) × circumference

= covered total distance

लगाए गए चक्करों की संख्या (n) = $\dfrac{\text{चली गयी कुल दूरी}}{\text{परिधि}}$

Number of cycles taken (n)

$= \dfrac{\text{Covered total distance}}{\text{Circumference}}$

अतः/Hence,

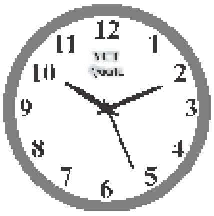
एक मिनट में लगाये गये चक्कर $= \dfrac{\text{1 मिनट में तय की गयी दूरी}}{\text{परिधि}}$

Number of cycles completed in one minute

$= \dfrac{\text{Distance covered in one minute}}{\text{circumference}}$

TEAM SPY

घड़ी (Clock)



■ **घण्टे वाली सुई (Hour hand) :**

➢ 12 घण्टे में तय किया गया कोण/Angle covered in 12 hours = 360°

➢ 1 घण्टे में तय किया गया कोण/Angle covered in 1 hours $= \frac{360}{12} = 30^\circ$

➢ 1 मिनट में तय किया गया कोण/Angle covered in 1 minute $= \frac{30}{60} = \frac{1^\circ}{2}$

■ **मिनट वाली सुई (Minute hand) :**

➢ 60 मिनट में तय किया गया कोण/Angle covered in 60 minutes = 360°

➢ 1 मिनट में तय किया गया कोण/Angle covered in 1 minute $= \frac{360}{60} = 6^\circ$

■ **सेकेण्ड वाली सुई (Second hand) :**

➢ 60 सेकेण्ड में तय किया गया कोण/Angle covered in 60 seconds = 360°

➢ 1 सेकेण्ड में तय किया गया कोण/Angle covered in 1 Second $= \frac{360}{60} = 6^\circ$

■ **घण्टे और मिनट वाली सुईयों के बीच का कोण (Angle between hour and minute hand) :**

$\because \; m = \frac{2}{11}[T_1 \times 30 \pm \theta]$

$\therefore \; \pm\boldsymbol{\theta} = \frac{\mathbf{11}}{\mathbf{2}}\mathbf{m} - \mathbf{30} \times \mathbf{T_1}$

जहाँ/Where,

m = मिनट वाली सुई (Minute hand)

T_1 = घण्टे वाली सुई (Hour hand)

Ex. : 2 बजकर 10 मिनट पर घण्टे और मिनट की सुईयों के बीच का कोण क्या होगा

What is the angle between the hour and minute hands of a clock when it strikes 2:10 pm?

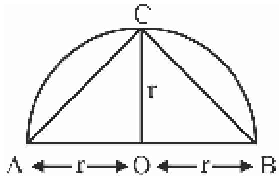
Sol. $\because \; \pm\theta = \frac{11}{2}m - 30 \times T_1$

$\pm\,\theta = \frac{11}{2} \times 10 - 30 \times 2$

$\pm\,\theta = 55 - 60$

$\boldsymbol{\theta = 5}$

■ **अर्धवृत्त में त्रिभुज का अधिकतम क्षेत्रफल (The maximum area of triangle in semicircle) :**



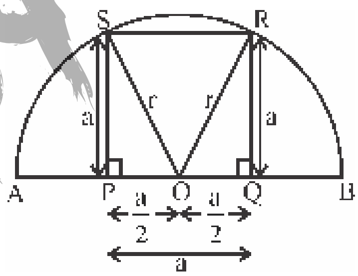
ΔABC का अधिकतम क्षेत्रफल/Maximum Area of ΔABC

$= \frac{1}{2} \times 2r \times r$

$\Delta = \frac{1}{2} \times 2r^2$

☞ $\boldsymbol{\Delta = r^2}$

■ **अर्धवृत्त में वर्ग का अधिकतम क्षेत्रफल (The maximum area of square in semicircle) :**



In Δ OPS,

$r^2 = a^2 + \frac{a^2}{4}$

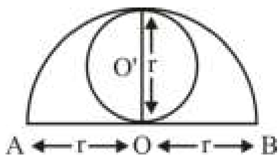
$r^2 = \frac{5a^2}{4}$

$a^2 = \frac{4r^2}{5}$

∵ वर्ग का क्षेत्रफल/Area of square, $A = a^2$

$\therefore \; \mathbf{A = \frac{4r^2}{5}}$

■ **अर्धवृत्त में वृत्त का अधिकतम क्षेत्रफल (The maximum area of circle in semicircle) :**

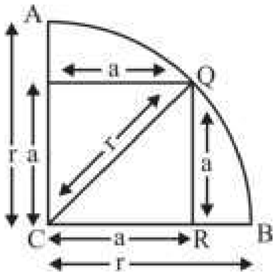


वृत्त की त्रिज्या (radius of circle) $= \frac{r}{2}$

क्षेत्रफल (Area) $= \pi\left(\frac{r}{2}\right)^2$

$\mathbf{A = \frac{\pi r^2}{4}}$

■ **चतुर्थांश में वर्ग का अधिकतम क्षेत्रफल (Maximum area of square in quadrant) :**



In Δ CRQ,

$r^2 = a^2 + a^2$

$r^2 = 2a^2$

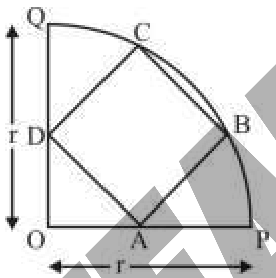
$r = a\sqrt{2}$

$a = \frac{r}{\sqrt{2}}$

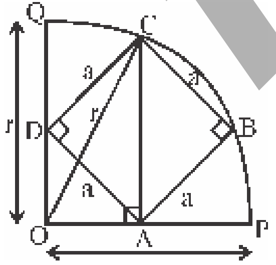
$\because A = a^2$

$\mathbf{A = \frac{r^2}{2}}$

■



➤



In ΔADC,

$AC^2 = a^2 + a^2$

$AC^2 = 2a^2$

$AC = a\sqrt{2}$

तब/then, in ΔAOD,

$a^2 = AO^2 + OD^2$

{∵ ABCD वर्ग है, ∴ OA = OD}

$a^2 = AO^2 + OA^2$

$a^2 = 2AO^2$

$AO^2 = \frac{a^2}{2}$

$AO = \frac{a}{\sqrt{2}}$

In Δ OAC,

$OC^2 = AO^2 + AC^2$

$r^2 = \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(a\sqrt{2}\right)^2$

$r^2 = \frac{a^2}{2} + 2a^2$

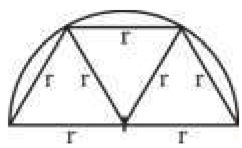
$r^2 = \frac{5a^2}{2}$

☞ $\mathbf{r = \sqrt{\frac{5}{2}}\, a}$

☞ **वर्ग का क्षेत्रफल/Area of square =** $\mathbf{\frac{2}{5}r^2}$

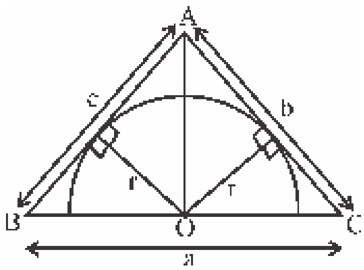
■ **तीन समबाहु त्रिभुजों का क्षेत्रफल जो किसी r सेमी. त्रिज्या के अर्ध वृत्त में बने हुये है।**

Total area of three equilateral triangles inscribed in a semicircle of radius 'r' cm.



Area $\mathbf{= \frac{3\sqrt{3}}{4}r^2}$

■



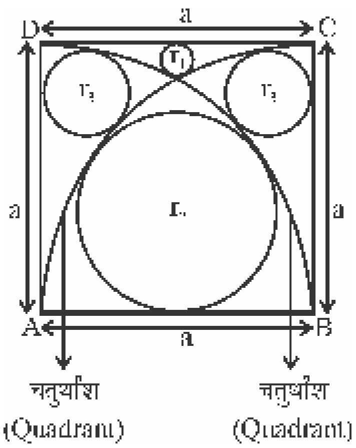
Area of Δ ABC = Area of Δ AOB + Area of Δ AOC

$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \frac{1}{2}\times r\times c + \frac{1}{2}\times r\times b$

☞ $\mathbf{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \frac{1}{2}\times r(b+c)}$

TEAM SPY

■



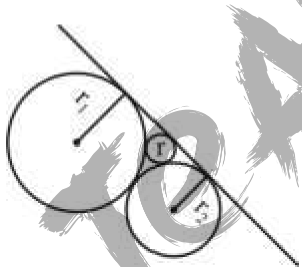
$\boxed{r_1 = \frac{a}{16}}$ $\boxed{r_2 = \frac{3a}{8}}$ $\boxed{r_3 = \frac{a}{6}}$

$$r_1 : r_2 : r_3 = \frac{a}{16} : \frac{3a}{8} : \frac{a}{6}$$

$$r_1 : r_2 : r_3 = \frac{3a : 18a : 8a}{48}$$

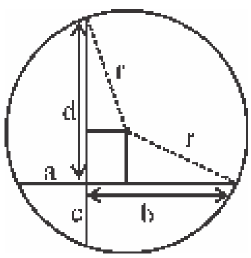
☞ $\mathbf{r_1 : r_2 : r_3 = 3 : 18 : 8}$

डेसकार्टेस प्रमेय (Descartes Theorem) :



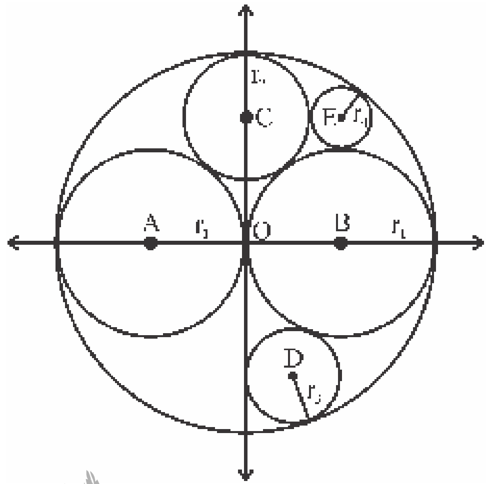
☞ $\frac{1}{\sqrt{r}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}}$

■ **a, b, c, d तथा r में सम्बन्ध (The relation among a, b, c, d and r) :**



☞ $\mathbf{r = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}}$

■ **यदि बड़े वृत्त की त्रिज्या R हो (If radius of bigger circle is R) :**



यदि केन्द्र O वाले वृत्त की त्रिज्या = R

If radius of circle with centre O = R

तब/then,

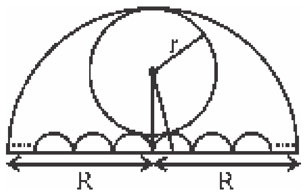
☞ $\mathbf{r_1 = \frac{R}{2}}$

☞ $\mathbf{r_2 = \frac{R}{3}}$

☞ $\mathbf{r_3 = \frac{R}{4}}$

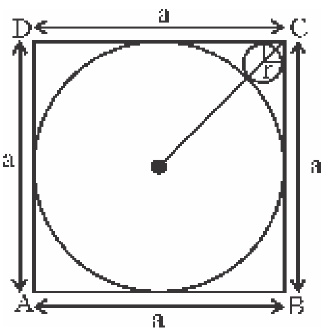
☞ $\mathbf{r_4 = \frac{R}{6}}$

■ **n अर्धवृत्तों के लिए (For n semicircle) :**



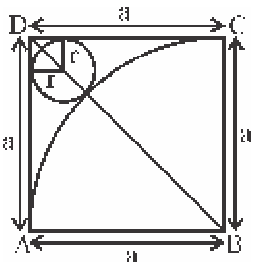
☞ $\mathbf{r = \frac{nR}{2(n+1)}}$

■



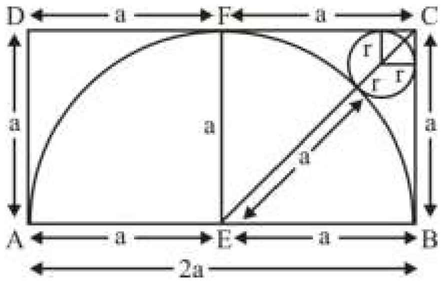
☞ $\mathbf{r = \frac{a\left(\sqrt{2}-1\right)}{2\left(\sqrt{2}+1\right)}}$

■



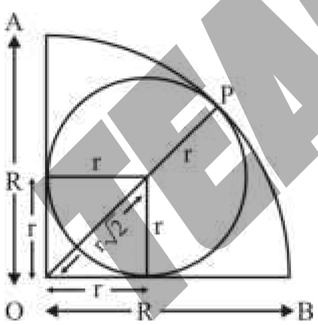
☞ $r = \frac{a(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)}$

■



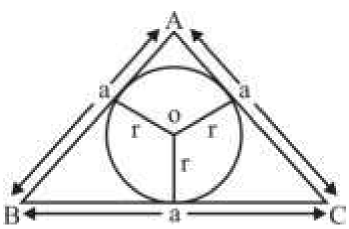
☞ $r = \frac{a(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)}$

■



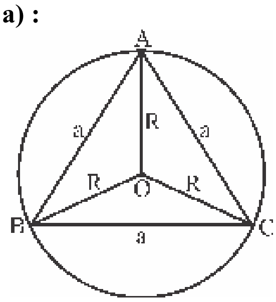
☞ $r = R(\sqrt{2}-1)$

■ **भुजा a वाले समबाहु Δ के अन्दर बने वृत्त की त्रिज्या (The radius of incircle in an equilateral Δ with side a) :**



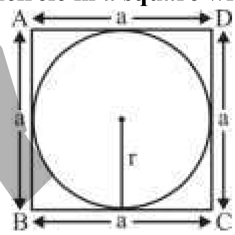
☞ $r = \frac{a}{2\sqrt{3}}$

■ **भुजा a वाले समबाहु Δ के बाहर बने वृत्त की त्रिज्या (The radius of circumcircle in an equilateral Δ with side a) :**



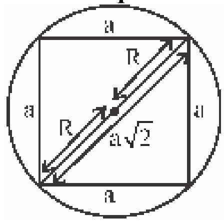
☞ $R = \frac{a}{\sqrt{3}}$

■ **"a" भुजा वाले वर्ग के अन्दर वृत्त की त्रिज्या (The radius of incircle in a square with side "a") :**



☞ $r = \frac{a}{2}$

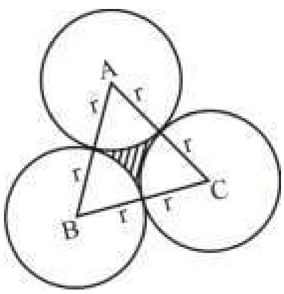
■ **a भुजा वाले वर्ग के वाह्य वृत्त की त्रिज्या (The radius of circum circle in a square with side a) :**



$R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

☞ $R = \frac{a}{\sqrt{2}}$

■ **छायांकित भाग का क्षेत्रफल /Area of shaded region :**



∵ Δ ABC एक समबाहु त्रिभुज होगा/Δ ABC an equilateral triangle

$AB = BC = CA = 2r$

तथा/and $\angle A = \angle B = \angle C = 60^{\circ}$

छायांकित भाग का क्षेत्रफल/Area of shaded region

TEAM SPY

$= \frac{\sqrt{3}}{4}(2r)^2 - 3\times\frac{60}{360}\pi r^2$

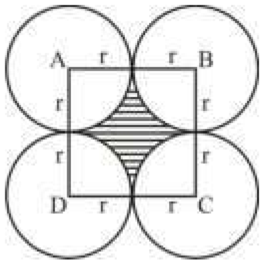
$= \frac{\sqrt{3}}{4}4r^2 - \frac{1}{2}\pi r^2$

$= r^2\left[\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}\right]$

☞ छायांकित भाग का क्षेत्रफल/Area of shaded region

$= \mathbf{r^2 \; \frac{2\sqrt{3}-\pi}{2}}$

■ **छायांकित भाग का क्षेत्रफल/Area of shaded region :**



∵ □ ABCD एक वर्ग होगा/□ ABCD is a square

AB = BC = CD = AD = 2r

$\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90^o$

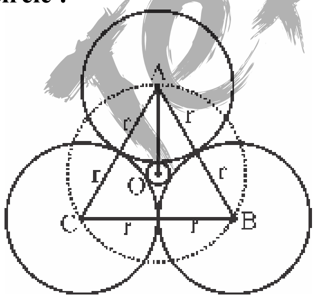
छायांकित भाग का क्षेत्रफल/Area of shaded region

$= (2r)^2 - 4\times\frac{90}{360}\pi r^2$

$= (2r)^2 - \pi r^2$

☞ $\mathbf{r^2(4-\pi)}$

■ **छोटे वृत्त की त्रिज्या ज्ञात करना/Find the radius smaller circle :**



समबाहु ΔABC की भुजा (a) = 2r

$\because R = \frac{a}{\sqrt{3}}$

$\because OA = \frac{2r}{\sqrt{3}}$

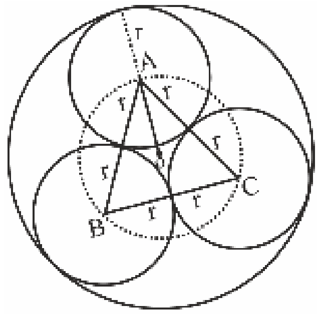
छोटे वृत्त की त्रिज्या (Radius of smaller circle)

$= OA - r$

$= \frac{2r}{\sqrt{3}} - r$

☞ $\mathbf{r \;\; \frac{2}{\sqrt{3}} - 1}$

■ **बड़े वृत्त की त्रिज्या ज्ञात करना/ Find the radius of bigger circle :**



समबाहु ΔABC की भुजा (a) = 2r

$OA = \frac{a}{\sqrt{3}}$

$\{\because a = 2r\}$

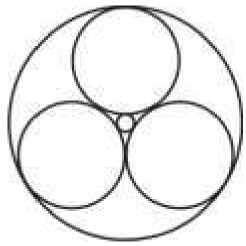
$OA = \frac{2r}{\sqrt{3}}$

बड़े वृत्त की त्रिज्या/Radius of bigger circle

$= OA + r = \frac{2r}{\sqrt{3}} + r$

☞ $\mathbf{r \;\; \frac{2}{\sqrt{3}} + 1}$

■ **छोटे वृत्त की त्रिज्या और बड़े वृत्त की त्रिज्या में अनुपात ज्ञात करना/Find the ratio of smaller circle radius to bigger circle radius :**



$\frac{\text{छोटे वृत्त की त्रिज्या (Radius of smaller circle)}}{\text{बड़े वृत्त की त्रिज्या (Radius of bigger circle)}}$

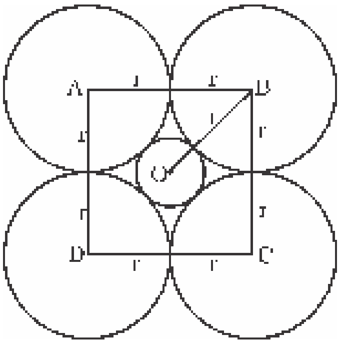
$= \frac{r\;\; \frac{2}{\sqrt{3}} - 1}{r\;\; \frac{2}{\sqrt{3}} + 1} = \frac{(2-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})}\times\frac{(2-\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})}$

$= \frac{(2-\sqrt{3})^2}{(2)^2 - (\sqrt{3})^2} \qquad = \frac{4+3-4\sqrt{3}}{4-3}$

$= \frac{(7-4\sqrt{3})}{1}$

☞ $\mathbf{(7-4\sqrt{3}):1}$

■ **छोटे वृत्त की त्रिज्या ज्ञात करना/The radius of smaller circle :**



वर्ग की भुजा/Side of square :-

AB = BC = CD = DA = 2r

$OB = \frac{\sqrt{2}\times 2r}{2}$ $\qquad \because OB = \frac{BD}{2}$

$OB = \sqrt{2}\,r$

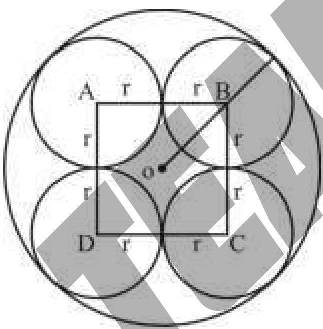
∵ छोटे वृत्त की त्रिज्या/Radius of smaller circle

$= OB - r$

$= \sqrt{2}\ r - r$

☞ $= \mathbf{r(\sqrt{2}-1)}$

■ **बड़े वृत्त की त्रिज्या ज्ञात करना/The radius of bigger circle :**



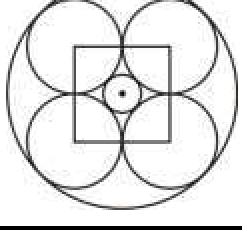
$OB = \frac{\sqrt{2}\times 2r}{2}$ $\qquad \because OB = \frac{BD}{2}$

$OB = \sqrt{2}r$

बड़े वृत्त की त्रिज्या/Radius of bigger circle = $\sqrt{2}r + r$

☞ $\mathbf{(\sqrt{2}+1)r}$

■ **बड़े वृत्त की त्रिज्या और छोटे वृत्त की त्रिज्या में अनुपात ज्ञात करना/Find the ratio of Radius of smaller circle to bigger circle :**



$$\frac{\text{छोटे वृत्त की त्रिज्या (Radius of smaller circle)}}{\text{बड़े वृत्त की त्रिज्या (Radius of bigger circle)}}$$

$$= \frac{(\sqrt{2}-1)r}{(\sqrt{2}+1)r} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\times\frac{(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}-)}$$

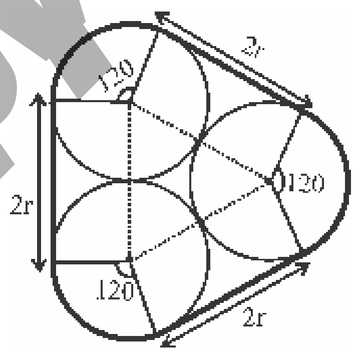
$$= \frac{(\sqrt{2}-1)^2}{(\sqrt{2})^2-(1)^2} = \frac{2+1-2\sqrt{2}}{2-1}$$

$$= \frac{(3-2\sqrt{2})}{1}$$

☞ $= (3-2\sqrt{2}):1$

■ **रबर बैण्ड की लम्बाई ज्ञात करना/Find the length of rubber band :-**

सभी वृत्त एक समान त्रिज्या r सेमी के हैं/All the circles are of equal radius r cm.

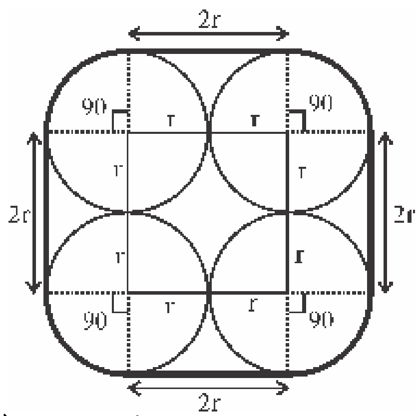


रबर बैण्ड की लम्बाई/length of rubber band

$$= 6r + 3\times\frac{120}{360}\times 2\pi r$$

☞ **$6r + 2\pi r$ or $3d + 2\pi r$**

■ सभी वृत्त एक समान त्रिज्या r सेमी के हैं/All the circles are of equal radius r cm.



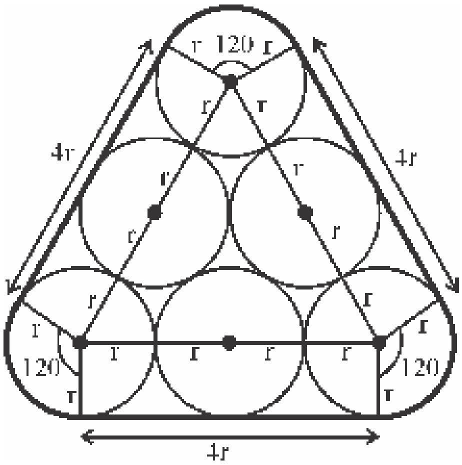
रबर बैण्ड की लम्बाई/ Length of rubber band

$$= 8r + 4\times\frac{90}{360}\times 2\pi r$$

☞ **$8r + 2\pi r$ or $4d + 2\pi r$**

TEAM SPY

■ सभी वृत्त एक समान त्रिज्या r सेमी के हैं/All the circles are of equal radius r cm.

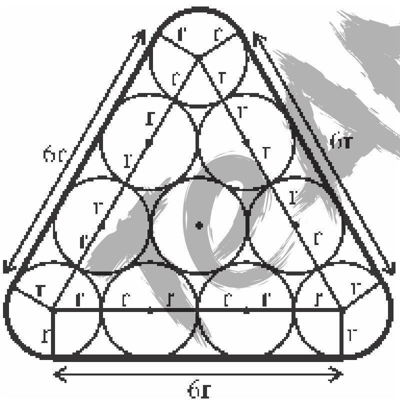


रबर बैण्ड की लम्बाई/Length of rubber band

$$= 12r + 3 \times \frac{120}{360} \times 2\pi r$$

☞ **12r + 2πr or 6d + 2πr**

■ सभी वृत्त एक समान त्रिज्या r सेमी के हैं/All the circles are of equal radius r cm.



रबर बैण्ड की लम्बाई/Length of rubber band

$$= 18r + 3 \times \frac{120}{360} \times \pi r$$

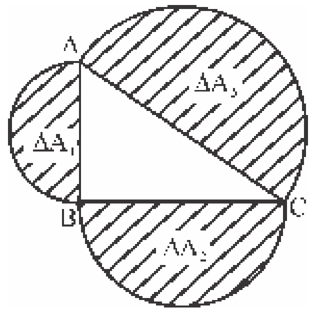
☞ **18r + 2πr or 9d + 2πr**

✍ रबर बैण्ड का प्रश्न हल करते समय यह ध्यान दें कि रबर बैण्ड जितने वृत्तों को स्पर्श करता है, उतने वृत्तों का व्यास तथा एक वृत्त की परिधि का योग, रबर बैण्ड की लम्बाई होगी।

While sloving the problem of rubber band, keep in mind that the sum of the diameter of the circles touched by the rubber band and the circumference of a circle will be the length of the rubber band.

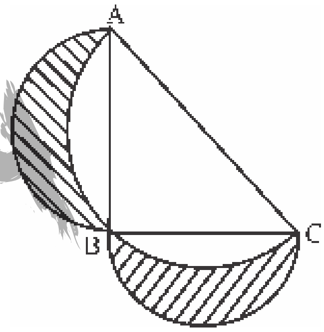
■ **छायांकित भाग का क्षेत्रफल/Area of shaded region :-**

➢



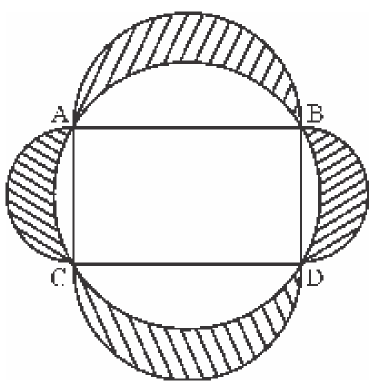
☞ $\Delta A_1 + \Delta A_2 = \Delta A_3$

➢



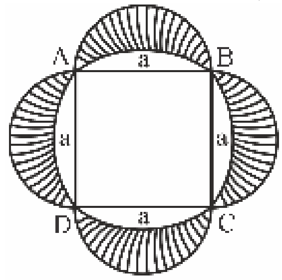
छायांकित भाग का क्षेत्रफल = Δ ABC का क्षेत्रफल
Area of shaded region = Area of Δ ABC

➢



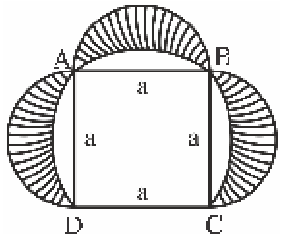
☞ **छायांकित भाग का क्षेत्रफल = आयत का क्षेत्रफल**
Area of shaded region = Area of rectangle

➢ भुजा AB, BC, CD, AD पर अर्द्धवृत्त बनाए गये हैं।
Semicircles are drawn on sides AB, BC, CD, AD.



☞ छायांकित भाग का क्षेत्रफल/Area of shaded region $= a^2$

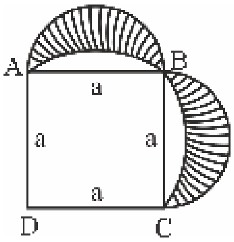
➢



☞ छायांकित भाग का क्षेत्रफल/Area of shaded region area

$= \frac{3}{4}a^2$

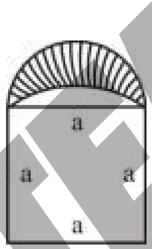
➢



☞ छायांकित भाग का क्षेत्रफल/Area of shaded region

$= \frac{a^2}{2}$

➢

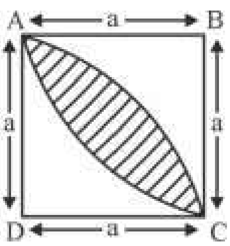


☞ छायांकित भाग का क्षेत्रफल/Area of shaded region

$= \frac{a^2}{4}$

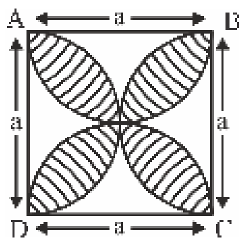
■ **पत्ती का क्षेत्रफल /Area of leaf :-**

➢



☞ $\left(\frac{\pi}{2}-1\right)a^2 \quad \frac{4}{7}a^2$

➢



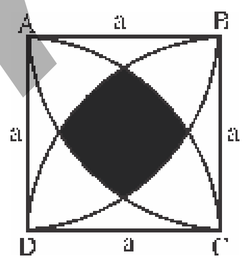
∵ एक पत्ती का क्षेत्रफल $= \frac{4}{7}\left(\frac{a}{2}\right)^2$

$= \frac{4}{7} \times \frac{a^2}{4}$

$= \frac{a^2}{7}$

☞ **चारों पत्तियों का क्षेत्रफल** $= 4 \times \frac{a^2}{7}$

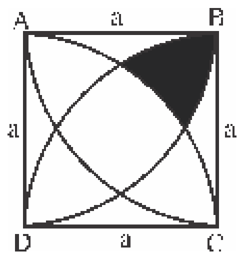
➢



☞ छायांकित भाग का क्षेत्रफल/Area of shaded region

$= \frac{a^2}{3}\left\{3\left(1-\sqrt{3}\right)+\pi\right\}$

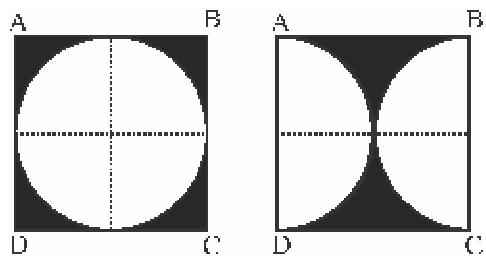
➢



☞ छायांकित भाग का क्षेत्रफल/Area of shaded region

$= \frac{a^2}{12}\left(\pi - 12 + 6\sqrt{3}\right)$

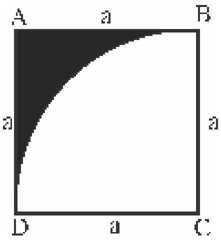
➢



☞ छायांकित भाग का क्षेत्रफल प्रत्येक स्थिति में समान होगा। Area of shaded region is equal in each case.

TEAM SPY

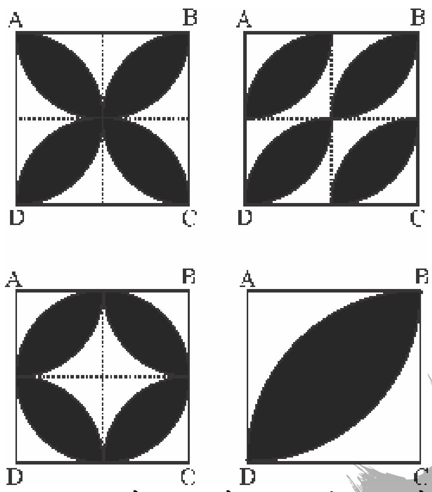
➢



☞ छायांकित भाग का क्षेत्रफल/Area of shaded region

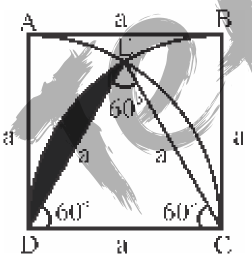
$$= a^2 - \frac{\pi a^2}{4} = \frac{a^2}{4}(4-\pi)$$

➢



☞ छायांकित भाग का क्षेत्रफल प्रत्येक स्थिति में समान होगा।
Area of shaded region is equal in each case.

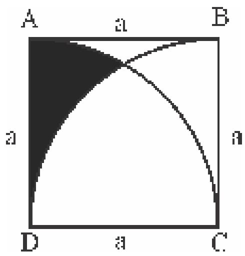
➢



☞ छायांकित भाग का क्षेत्रफल/Area of shaded region

$$= \frac{a^2}{12}\ 2\pi - 3\sqrt{3}$$

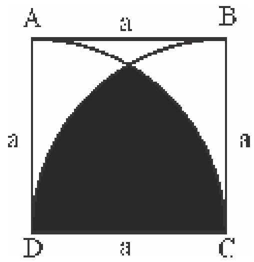
➢



☞ छायांकित भाग का क्षेत्रफल/Area of shaded region

$$= \frac{a^2}{12}\ 3\sqrt{3} - \pi$$

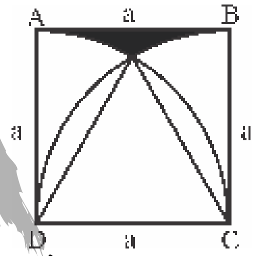
➢



☞ छायांकित भाग का क्षेत्रफल/Area of shaded region

$$= \frac{a^2}{12}\ 4\pi - 3\sqrt{3}$$

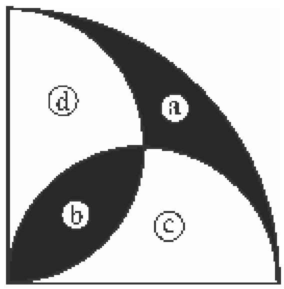
➢



☞ छायांकित भाग का क्षेत्रफल/Area of shaded region

$$= \frac{a^2}{12}\ 12 - 3\sqrt{3} - 2\pi$$

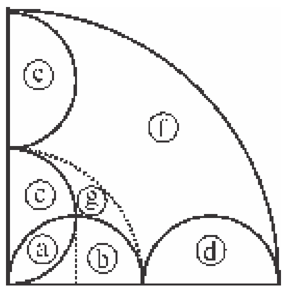
➢



☞ a का क्षेत्रफल (Area of a) = b का क्षेत्रफल (Area of b)

☞ c का क्षेत्रफल (Area of c) = d का क्षेत्रफल (Area of d)

➢



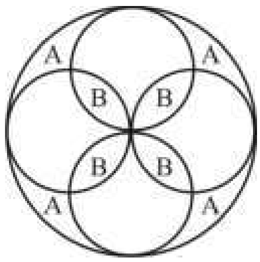
☞ a का क्षेत्रफल (Area of a) = g का क्षेत्रफल (Area of g)

☞ b का क्षेत्रफल (Area of b) = c का क्षेत्रफल (Area of c)

☞ d का क्षेत्रफल (Area of d) = e का क्षेत्रफल (Area of e)

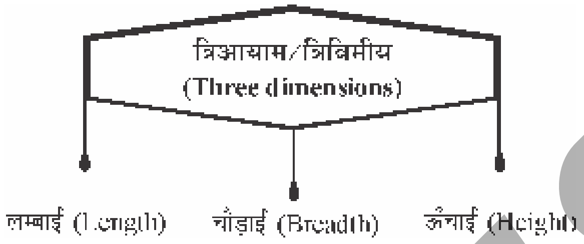
☞ a + c का क्षेत्रफल (Area of a + c)
= a + b का क्षेत्रफल (Area of a + b)

■ **यदि A और B क्षेत्रफल हैं तब A : B ज्ञात कीजिए।**
If A and B are the area then find the A : B.



☞ **A : B = 1 : 1**

त्रिआयामी/त्रिविमीय क्षेत्रमिति (3D-Mensuration)



■ 3D मापन 3D आकृतियों के आयतन और सतह क्षेत्र का अध्ययन है। 3D आकृतियों के तीन आयाम होते हैं, लम्बाई, चौड़ाई और ऊँचाई। 3D मापन से संबंधित कुछ शब्द यहाँ दिए गए हैं :
3D mensuration is the study of the volume and surface area of 3D figure. 3D figures have three dimensions; length, breadth and height. Here are some terms related to 3D mensuration :

➢ **आयतन-** किसी वस्तु द्वारा घेरे हुए स्थान की मात्रा।
Volume : The amount of space occupied by an object.

➢ **परिधि-** किसी आकृति की सीमा के साथ सतत रेखा का माप।
Perimeter- The measurement of the continuous line along the boundary of a figure.

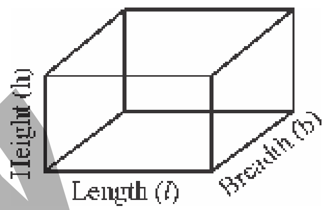
➢ **वक्र पृष्ठीय क्षेत्र-** किसी वक्र सतह का कुल क्षेत्रफल, जैसे कि एक गोला या बेलन।
Curved surface area- The total area of a curved surface, such as a sphere of cylinder.

➢ **पार्श्व सतह क्षेत्र-** किसी आकृति के चारों ओर स्थित सभी पार्श्व सतहों का कुल क्षेत्रफल।
Lateral surface area : The total area of all the lateral surface surrounding a figure.

➢ **कुल सतह क्षेत्र-** एक बंद आकृति में सभी सतहों के क्षेत्रफल का योग।
Total surface area- The sum of the area of all the surface in a closed shape.

त्रिआयामी आकृतियाँ (3D-Figures)	
घनाभ (Cuboid)	घन (Cube)
बेलन (Cylinder)	खोखला बेलन (Hollow cylinder)
शंकु (Cone)	छिन्नक (Frustum)
गोला (Sphere)	अर्धगोला (Hemisphere)
डमरू (Damru)	प्रिज्म (Prism)
पिरामिड (Pyramid)	टेट्राहेड्रोन (tetrahedron)

घनाभ (Cuboid)



➢ पार्श्व पृष्ठ/Lateral surface (L.S.) = 4
➢ सम्पूर्ण पृष्ठ/Total Surface (T.S.) = 6
➢ किनारा/Edge (E) = 12
➢ शीर्ष/Vertices (V) = 8

■ **यूलर प्रमेय (Euler's Theorem):** किसी भी त्रिआयामी सपाट सतह आकृति के लिए/For any 3D flat surface figure
☞ $\mathbf{V + F - E = 2}$

■ **आयतन (Volume) :**
☞ $\mathbf{V = l \times b \times h}$

■ **पार्श्व पृष्ठ क्षेत्रफल (Lateral surface Area) :**
☞ पार्श्व पृष्ठ क्षेत्रफल = आधार का परिमाप × ऊँचाई
L.S.A. = Perimeter of base × height
☞ $\mathbf{L.S.A. = 2(l + b) \times h}$

■ **सम्पूर्ण पृष्ठ क्षेत्रफल (Total surface area) :**
सम्पूर्ण पृष्ठ क्षेत्रफल = पार्श्व पृष्ठ क्षेत्रफल + 2 × आधार का क्षे.
T.S.A. = L.S.A. + 2 × Area of base
$= 2(l + b) \times h + 2 \times lb$
$= 2lh + 2bh + 2lb$
☞ $\mathbf{T.S.A. = 2 (lb + bh + hl)}$

■ **विकर्ण (Diagonal) :**
किसी कमरे में रखी जा सकने वाली बड़ी छड़ की लम्बाई (Length of longest rod that can be placed in the room)
☞ $\mathbf{d = \sqrt{l^2 + b^2 + h^2}}$

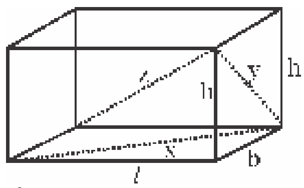
➢ $(l + b + h)^2 = l^2 + b^2 + h^2 + 2(lb+bh+hl)$
(भुजाओं का योगफल)^2 = d^2 + T.S.A.
(Sum of sides)^2 = d^2 + T.S.A.

TEAM SPY

➢ यदि एक घनाभ की तीन आसन्न फलकों का क्षेत्रफल क्रमशः x, y तथा z हो/ If area of three adjacent faces of a cuboid are x, y and z respectively-
माना घनाभ की भुजाएं/Let sides of cuboid = l,b,h
तब/then,
$x = l.b$
$y = b.h$
$z = hl$
$\therefore x.y.z = l^2 b^2 h^2$
$x.y.z. = (lbh)^2$
$x.y.z. = v^2$
$v^2 = x.y.z$

☞ $\mathbf{v = \sqrt{x.y.z}}$

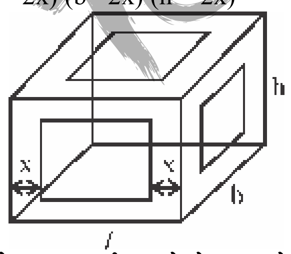
➢ यदि x, y, z एक घनाभ के तीन आसन्न फलकों के विकर्ण हैं-
If x, y, z are diagonals of three adjacent faces of a cuboid-



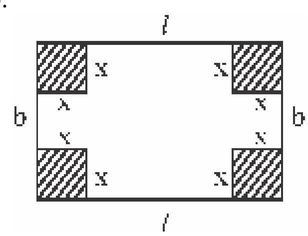
माना घनाभ की भुजाएं/Let the sides of cuboid= l, b, h
$x^2 = l^2 + b^2$
$y^2 = b^2 + h^2$
$z^2 = h^2 + l^2$
$x^2 + y^2 + z^2 = 2(l^2 + b^2 + h^2)$
$x^2 + y^2 + z^2 = 2d^2$

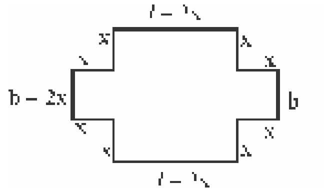
☞ $\mathbf{d^2 = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2}}$

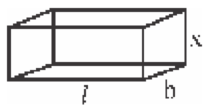
➢ यदि घनाभ की मोटाई x है, तो खोखले घनाभ का आयतन/If x is the thickness of a cuboid, then volume of the hollow cuboid-
$v = lbh-(l-2x)(b-2x)(h-2x)$



➢ चारो कोनों से बराबर वर्ग काटने के बाद शेष को मोड़कर हम एक खुला आयताकार डिब्बा बना सकते हैं।
We can make an open rectangular box by cutting off equal squares at four corners and the remainder is folded up.







आयताकार वाक्स का आयतन/Volume of rectangular box

☞ $\mathbf{V = (l - 2x)(b - 2x)x}$

➢ पिघलाने, दुबारा बनाने और मिट्टी निकालने वाले प्रश्नों में, आयतन नियत रहता है।
In the questions related to melting, recasting and digging, volume remains constant.

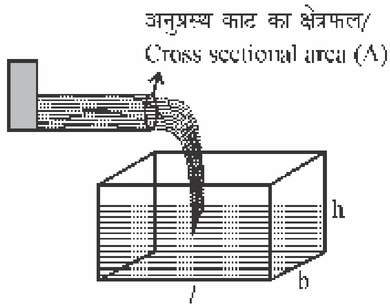
■ **जल में x लीटर वृद्धि अथवा कमी/x liter increase or decrease in water level-**

➢ x लीटर = आधार का क्षेत्रफल × ऊँचाई में वृद्धि/कमी
x litre = Area of base × Increase or decrease height

➢ 10 cm × 10 cm × 10 cm = 1 litre
$1000\ cm^3$ = 1 litre

➢ 1 m × 1 m × 1 m = 1000 litres
$1m^3$ = 1000 litres

➢



Where, V → Volume (आयतन)
v → velocity of water (पानी का वेग)
A → cross sectional area (अनुप्रस्थ काट का क्षेत्रफल)

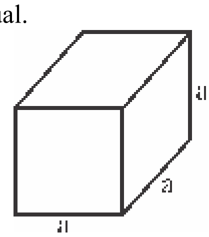
टंकी में भरा पानी का आयतन = पाइप द्वारा t समय में प्रवाहित पानी

$l \times b \times h = v \times A \times t$ $\{\because V = vAt,\ V = lbh\}$

☞ $\mathbf{l \times b \times h = v \times A \times t}$

घन (Cube)

■ एक ठोस आकृति जिसकी लम्बाई, चौड़ाई और ऊँचाई बराबर होती है।/A solid figure in which length, breadth and height are equal.



- ➢ पार्श्व पृष्ठ/Lateral surface (L.S.) = 4
- ➢ सम्पूर्ण पृष्ठ/Total Surface (T.S.) = 6
- ➢ किनारा/Edge (E) = 12
- ➢ शीर्ष/Vertices (V) = 8

■ **पार्श्व पृष्ठ क्षेत्रफल (Lateral surface area) :**

☞ **$L.S.A = 4a^2$**

■ **सम्पूर्ण पृष्ठ क्षेत्रफल (Total surface area) :**

☞ **$T.S.A = 6a^2$**

■ **आयतन (Volume) :**

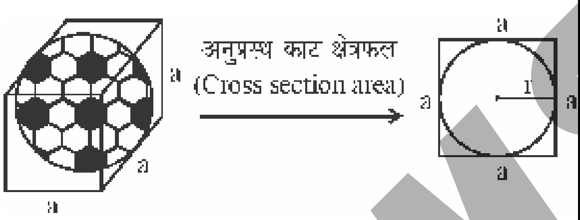
☞ $V = a^3$

■ **विकर्ण (diagonal) :**

☞ **$d = a\sqrt{3}$**

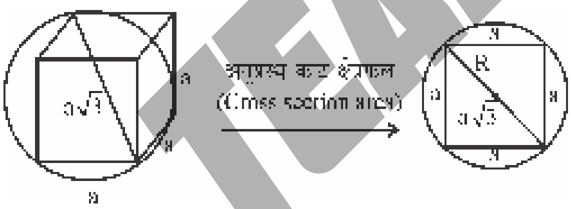
घन के साथ अन्य आकृतियाँ
(Other figures with cubes)

➢



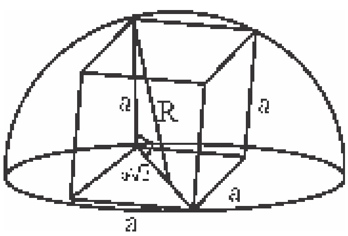
☞ $\mathbf{r = \frac{a}{2}}$

➢



☞ $\mathbf{R = \frac{a\sqrt{3}}{2}}$

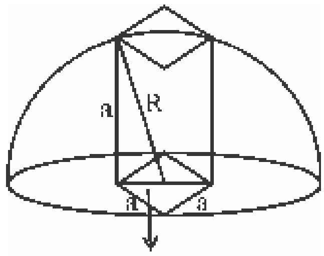
➢



$\because R = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2}$ $\quad R = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{2}}$

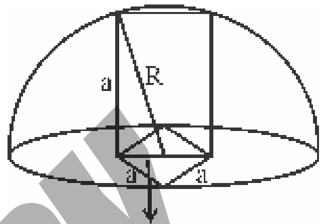
$R = \sqrt{\frac{3a^2}{2}}$ $\quad \mathbf{R = \sqrt{\frac{3}{2}}\, a}$

➢



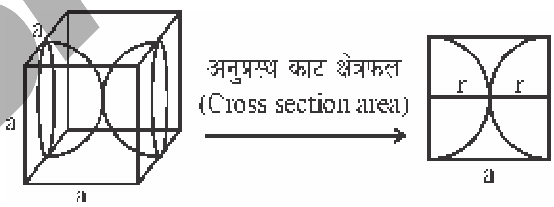
$\frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a}{\sqrt{2}}$

or



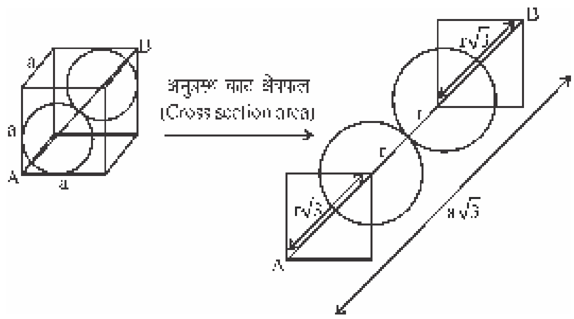
$\frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a}{\sqrt{2}}$

➢



☞ $\mathbf{r = \frac{a}{2}}$

➢



$a\sqrt{3} = r + r + r\sqrt{3} + r\sqrt{3}$

$a\sqrt{3} = 2r + 2r\sqrt{3}$

$a\sqrt{3} = 2r(\sqrt{3} + 1)$

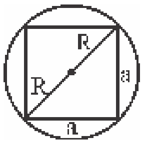
☞ $\mathbf{r = \frac{a\sqrt{3}}{2\left(\sqrt{3}+1\right)}}$

✍ **विद्यार्थी वृत्त और वर्ग के आधार पर घन और गोला को समझ सकते हैं।**

(Students can understand cube and sphere on the basis of circle and square)

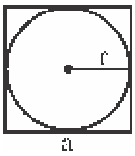
TEAM SPW

➢



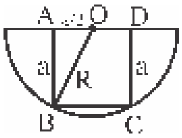
☞ $\mathbf{R=\frac{a\sqrt{2}}{2}}$

➢



☞ $\mathbf{r=\frac{a}{2}}$

➢



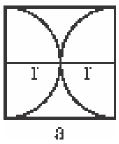
In ΔAOB,
पाइथागोरस प्रमेय से/by Pythagoras theorem,

$$R=\sqrt{\frac{a^2}{4}+a^2}$$

$$R=\sqrt{\frac{5a^2}{4}}$$

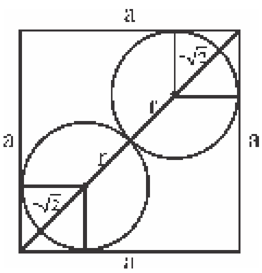
☞ $\mathbf{R=\frac{a}{2}\sqrt{5}}$

➢



☞ $\mathbf{r=\frac{a}{2}}$

➢



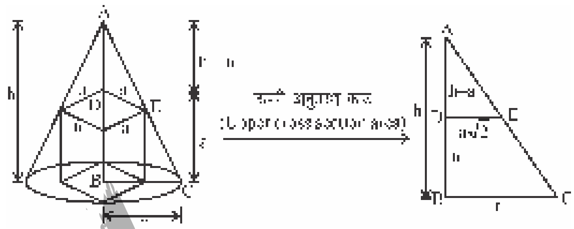
$$a\sqrt{2}=r+r+r\sqrt{2}+r\sqrt{2}$$
$$a\sqrt{2}=2r+2r\sqrt{2}$$
$$a\sqrt{2}=2r\left(\sqrt{2}\times 1\right)$$

☞ $\mathbf{r=\frac{a\sqrt{2}}{2\left(\sqrt{2}+1\right)}}$

➢

☞ $\mathbf{h=a}$ **&** $\mathbf{r=\frac{a}{2}}$ **and**

➢



$$\frac{DE}{BC}=\frac{AD}{AB}$$

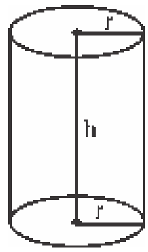
$$\frac{\left(a/\sqrt{2}\right)}{r}=\frac{(h-a)}{h}$$

$$\frac{a}{\sqrt{2}\times r}=\frac{h-a}{h}$$

$$ah=\sqrt{2}\ rh-\sqrt{2}\ ar$$
$$ah+\sqrt{2}\ ar=\sqrt{2}\ rh$$
$$a(h+\sqrt{2}\ r)=\sqrt{2}\ rh$$
$$a=\frac{\sqrt{2}\ rh}{\left(h+\sqrt{2}\ r\right)}$$

☞ $\mathbf{a=\frac{\sqrt{2}\ rh}{\sqrt{2}\ r+h}}$

बेलन (Cylinder)



■ **आयतन (Volume) :**
आयतन (V) = आधार का क्षेत्रफल × ऊँचाई
Volume (V) = Area of Base × height

☞ $\mathbf{V=\pi r^2 h}$

■ **वक्रपृष्ठ क्षेत्रफल (Curved surface area) :**
C.S.A. = आधार का परिमाप × ऊँचाई

☞ **C.S.A = 2πrh**

■ **सम्पूर्ण पृष्ठ क्षेत्रफल (Total Surface Area):**

सम्पूर्ण पृष्ठ क्षेत्रफल = वक्रपृष्ठ क्षेत्रफल + 2×आधार का क्षेत्रफल

T.S.A. = C.S.A. + 2× Area of Base

T.S.A. = $2\pi rh + 2\pi r^2$

☞ **T.S.A. = $2\pi r (h + r)$**

■ **वक्रपृष्ठ क्षेत्रफल और सम्पूर्ण पृष्ठ क्षेत्रफल में अनुपात**

Ratio between curved surface are and total surface area

$$\frac{C.S.A.}{T.S.A.} = \frac{2\pi rh}{2\pi r(h+r)}$$

☞ $$\frac{\mathbf{C.S.A.}}{\mathbf{T.S.A.}} = \frac{\mathbf{h}}{\mathbf{h+r}}$$

■ **यदि पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल (c) तथा ऊँचाई (h) दिए हो तो बेलन का आयतन :**

If curved surface area (c) and height (h) are given the volume of cylinder :

$\because c = 2\pi rh$

$$r = \frac{c}{2\pi h}$$

$$r^2 = \frac{c^2}{4\pi^2 h^2}$$

$\because V = \pi r^2 h$

$$V = \pi \frac{c^2}{4\pi^2 h^2} \times h$$

☞ $$\mathbf{V = \frac{c^2}{4\pi h}}$$

■ **यदि पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल (c) तथा आयतन (V) दिए हो, तो त्रिज्या का ऊँचाई से अनुपात-**

If curved surface area (c) and Volume (V) are given, then ratio of radius to height.

$\because c = 2\pi rh$

दोनों पक्षों का घन करने पर/Cube on both side,

$c^3 = 8\pi^3 r^3 h^3$

$\because V = \pi r^2 h$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर/Square on both side,

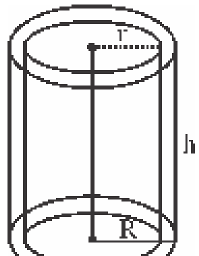
$V^2 = \pi^2 r^4 h^2$

तब/then, $\frac{c^3}{V^2} = \frac{8\pi^3 r^3 h^3}{\pi^2 r^4 h^2} \Rightarrow \frac{c^3}{V^2} = \frac{8\pi h}{r}$

$$\frac{c^3}{V^2} = \frac{8\pi h}{r}$$

☞ $$\mathbf{\frac{r}{h} = \frac{8\pi v^2}{c^3}}$$

खोखला बेलन (Hollow Cylinder)



■ **धातु की मात्रा/आयतन (Volume of metal) :**

$V = \pi R^2 h - \pi r^2 h$

$V = \pi (R^2 - r^2) h$

☞ **$V = \pi(R + r) (R - r) h$**

■ **पार्श्व/वक्रीय पृष्ठ क्षेत्रफल (Lateral/Curved surface area) :**

C.S.A. = $2\pi rh + 2\pi Rh$

☞ **C.S.A. = $2\pi(r + R)h$**

■ **सम्पूर्ण पृष्ठ क्षेत्रफल (Total surface area):**

T.S.A. = C.S.A. + $2\pi(R^2-r^2)$

T.S.A. = $2\pi(r + R)h + 2\pi(R^2-r^2)$

T.S.A. = $2\pi[(R + r)h + (R + r) (R - r)]$

☞ **T.S.A. = $2\pi(R + r) [h + R - r]$**

■ **मोटाई (Thickness):**

☞ $t = R - r$

■ **खोखले बेलन का द्रव्यमान (भार)/Mass (Weight) of hollow cylinder :**

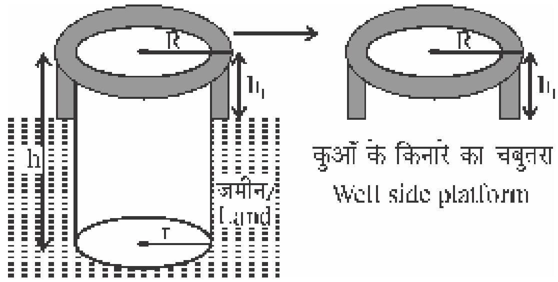
द्रव्यमान = घनत्व × आयतन

Mass = density × Volume of material

☞ **M = d × V**

कुएं की खुदाई और निकाली गयी मिट्टी (Digging a well and soil taken out)

■ **इसके चारो ओर चबुतरे के रूप में फैला देना/Spread all around it to form on embankment :**



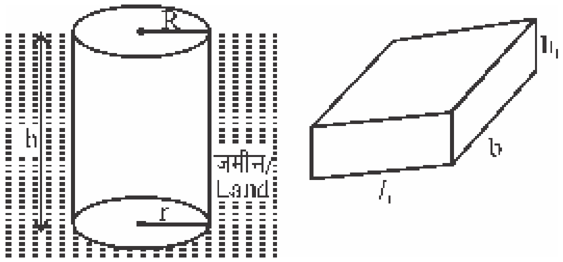
$\pi r^2 h = (\pi R^2 - \pi r^2)h_1$

$\pi r^2 h = \pi(R^2 - r^2)h_1$

☞ **$r^2 h = (R^2 - r^2)h_1$**

TEAM SPV

■ **Spread in cuboid (घनाभ के रूप मे फैला देना)**

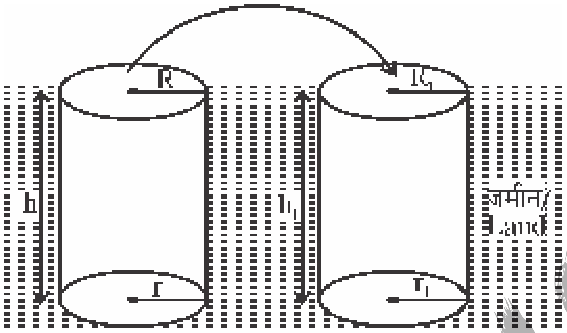


बेलन का आयतन = घनाभ का आयतन

(Volume of cylinder) = (volume of cuboid)

☞ $\pi r^2 h = l_1 b_1 h_1$

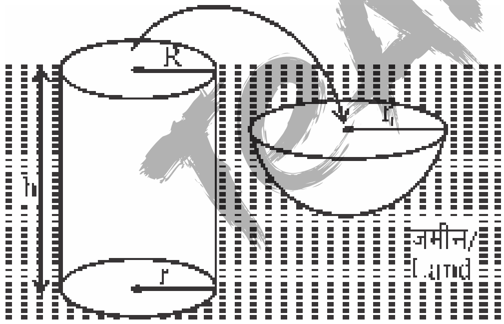
■ **Fill another well (एक दूसरे कुए मे भरना)**



☞ $\pi r^2 h = \pi r_1^2 h_1$

■ **एक अर्द्धगोलाकार आकृति में भर देना**

(Fill a hemisphere well) :



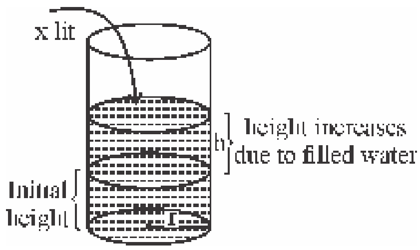
☞ $\pi r^2 h = \frac{2}{3}\pi r_1^3$

बेलनाकार टंकी के जल स्तर में वृद्धि और कमी
(Increasing and decreasing water level of a cylindrical tank)

⊙ 1000 cm^3 = 1 litre
⊙ 1 m^3 = 1000 litres

■ **x लीटर पानी डालने पर जल स्तर में वृद्धि**

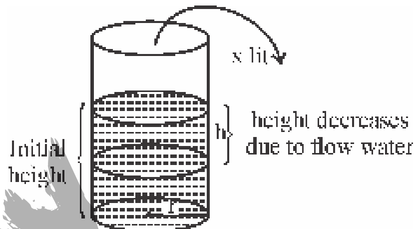
Increase in water level by adding x liters of water :



☞ **x litres** = $\pi r^2 h$

■ **x लीटर पानी निकालने पर जल स्तर में कमी**

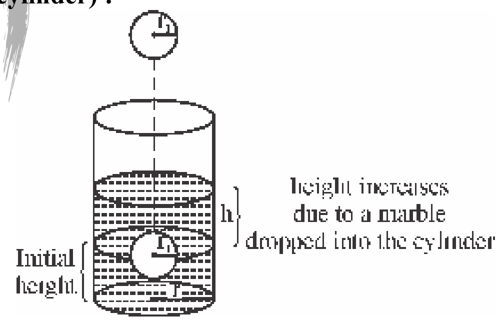
(Decrease in water level after removing x liters of water) :



☞ **x litres** = $\pi r^2 h$

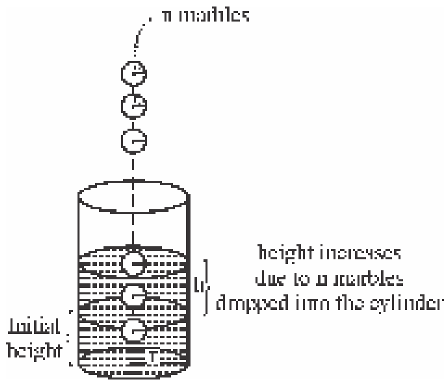
■ **यदि r_1 त्रिज्या का एक मारबल बेलन में डुबाया जाए**

(If a marble of r_1 radius dropped in to the cylinder) :



☞ $\frac{4}{3}\pi r_1^3 = \pi r^2 h$

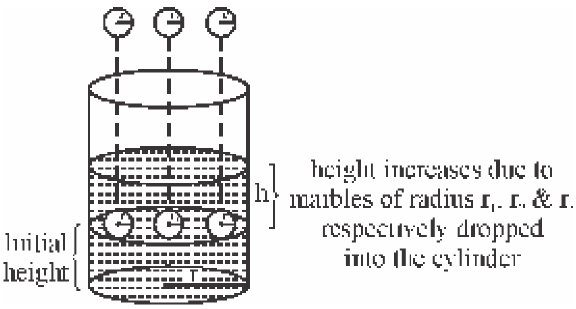
■ **यदि r_1 त्रिज्या के n मारबल्स बेलन में डुबोए जाए (If n marbles of r_1 radius each dropped in to the cylinder) :**



☞ $n \times \frac{4}{3}\pi r_1^3 = \pi r^2 h$

■ यदि r_1, r_2 और r_3 त्रिज्या के 3 मारबल्स बेलन में डुबोए जाए

(If 3 marbles radii of r_1, r_2 & r_3 dropped in to the cylinder) :

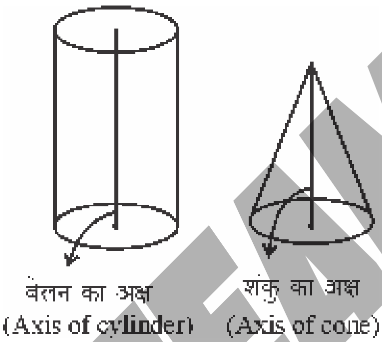


$$\frac{4}{3}\pi r_1^3 + \frac{4}{3}\pi r_2^3 + \frac{4}{3}\pi r_3^3 = \pi r^2 h$$

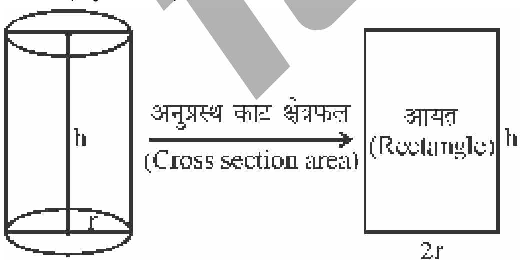
☞ $$\mathbf{\frac{4}{3}\pi(r_1^3 + r_2^3 + r_3^3) = \pi r^2 h}$$

अनुप्रस्थ काट क्षेत्रफल (Cross section area)

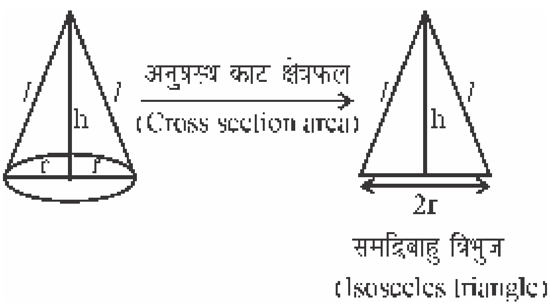
■



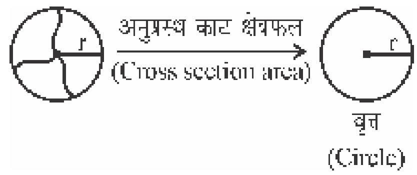
■ **बेलन (Cylinder)**



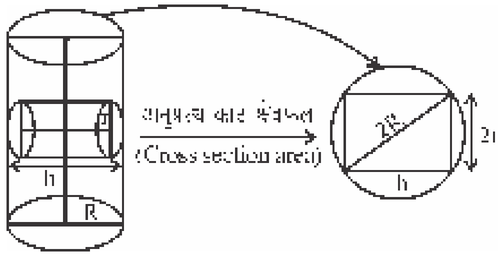
■ **शंकु (Cone)**



■ **गोला (Sphere) :**



■ **बेलन के अंदर बेलन (Cylinder inside a Cylinder) :**



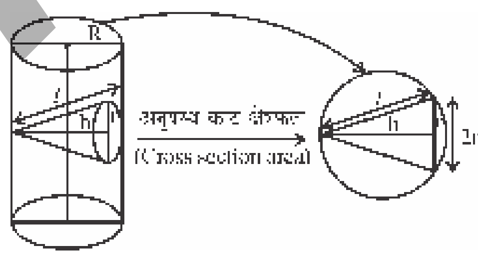
$(2R)^2 = h^2 + (2r)^2$

$4R^2 = h^2 + 4r^2$

$4R^2 - 4r^2 = h^2$

☞ $$\mathbf{\frac{(R^2 - r^2)}{h^2} = \frac{1}{4}}$$

■ **बेलन के अंदर शंकु (Cone inside a Cylinder) :**



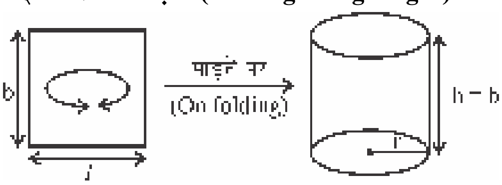
$$R = \frac{abc}{4\Delta}$$

$$R = \frac{\ell \times \ell \times 2r}{4 \times \frac{1}{2} \times 2r \times h}$$

☞ $$\mathbf{R = \frac{\ell^2}{2h}}$$

आयताकार शीट को मोड़ना
(Folding a Rectangular sheet)

■ **लम्बाई के साथ मोड़ना (Folding along length) :**



∵ $\ell = 2\pi r$

☞ $$\mathbf{r = \frac{\ell}{2\pi}}$$

☞ **h = b**

TEAM SPY

■ **चौड़ाई के साथ मोड़ना (Folding along breadth) :**

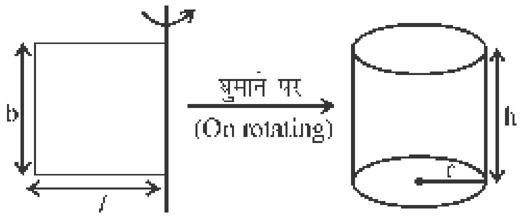
$2\pi r = b$

☞ $\mathbf{r = \frac{b}{2\pi}}$

☞ $\mathbf{h = l}$

आयताकार शीट को घुमाना (Rotating the rectangle sheet)

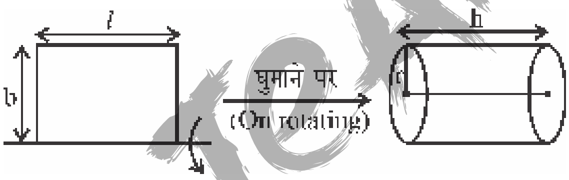
■ **चौड़ाई के परितः घुमाने पर बनी आकृति (The shape formed by rotating the rectangle to the width) :**



☞ $\mathbf{r = \ell}$

☞ $\mathbf{h = b}$

■ **लम्बाई के परितः घुमाने पर बनी आकृति (The shape formed by rotating the rectangle to the length) :**

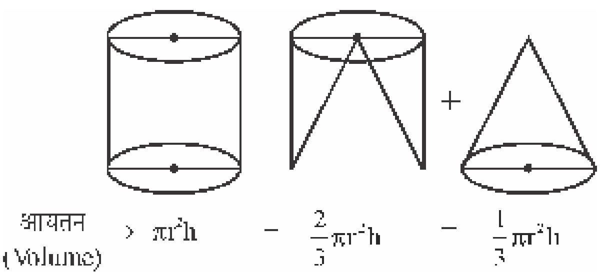


☞ $\mathbf{r = b}$

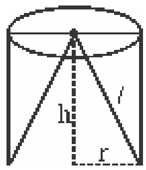
☞ $\mathbf{h = \ell}$

बेलन से आकृतियों को काटना (Cutting shapes with a cylinder)

■ **बेलन से शंकु काटना (Cutting a cone from a cylinder) :**



■ **सम्पूर्ण पृष्ठ क्षेत्रफल (Total surface area/T.S.A.) :**

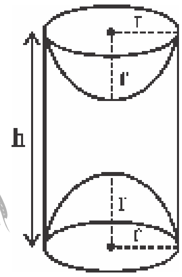


☞ $\ell = \sqrt{\mathbf{h^2 + r^2}}$

☞ **T.S.A.** $\mathbf{= 2\pi rh + \pi r^2 + \pi r\ell}$

✍ बेलन के सम्पूर्ण पृष्ठ क्षेत्रफल से अधिक होगा
(More than the total surface area of the cylinder)

■ **बेलन से दो अर्द्ध गोले काटना (Cutting two hemi shphere from a cylinder) :**



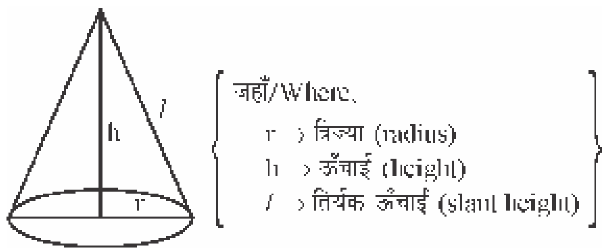
☞ $\mathbf{h > 2r}$

∵ शेष भाग का सम्पूर्ण पृष्ठ क्षेत्रफल (Total surface area of remaining part) = $2\pi rh + \frac{4\pi r^2}{2} \times 2$

☞ $\mathbf{2\pi rh + 4\pi r^2}$

✍ बेलन के सम्पूर्ण पृष्ठ क्षेत्रफल से अधिक होगा
(More than the total surface area of the cylinder)

शंकु (Cone)



➢ **पाइथागोरस प्रमेय से/by Pythagoras theorem,**

$\ell^2 = h^2 + r^2$

☞ $\ell = \sqrt{\mathbf{h^2 + r^2}}$

➢ **आयतन/Volume (V)**

आयतन $= \frac{1}{3} \times$ आधार का क्षेत्रफल $\times$ ऊँचाई

Volume $= \frac{1}{3} \times$ area of base $\times$ height

☞ $\mathbf{V = \frac{1}{3}\pi r^2 h}$

➢ **वक्रपृष्ठ क्षेत्रफल/Curved surface area (C.S.A.)**

वक्रपृष्ठ क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times$ आधार का परिमाप $\times$ तिर्यक ऊँचाई

C.S.A. $= \frac{1}{2} \times$ perimeter of base $\times$ slant height

☞ **C.S.A. = $\pi r \ell$**

➢ **सम्पूर्ण पृष्ठ क्षेत्रफल/Total surface area (T.S.A.)**

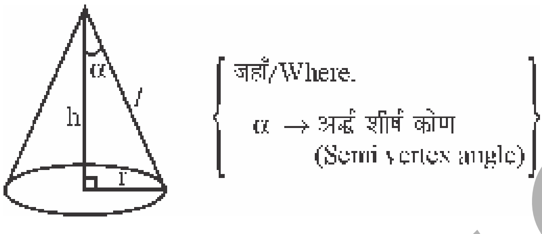
सम्पूर्ण पृष्ठ क्षेत्रफल = वक्रपृष्ठ क्षेत्रफल + आधार का क्षेत्रफल

T.S.A. = C.S.A. + area of base

T.S.A. = $\pi r \ell + \pi r^2$

☞ **T.S.A. = $\pi r(\ell + r)$**

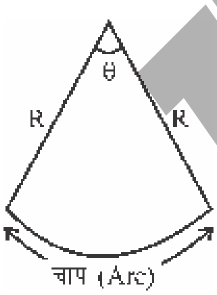
■ **अर्द्ध शीर्ष कोण (Semi vertex angle) :**



☞ **$\sin \alpha = \frac{r}{\ell}$**

☞ **$\tan \alpha = \frac{r}{h}$**

■ **त्रिज्य खण्ड (Sector) :**



☞ **चाप की लम्बाई (Length of arc)**

$$= \frac{\theta}{360} \times 2\pi R$$

☞ **त्रिज्य खण्ड का परिमाप (Perimeter of sector)**

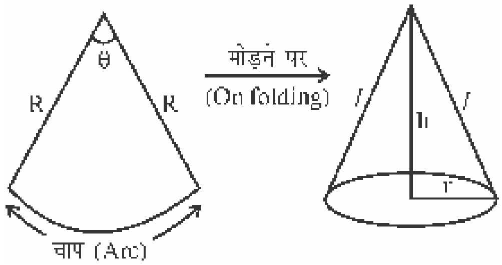
$$= \frac{\theta}{360} \times 2\pi R + 2R$$

☞ **त्रिज्य खण्ड का क्षेत्रफल (Area of sector)**

$$= \frac{\theta}{360} \times \pi R^2$$

त्रिज्य खण्ड द्वारा निर्मित शंकु
(Cone formed by a sector)

➢



चाप की लम्बाई = शंकु के आधार की परिधि

Length of arc = Circumference of base of cone

$\frac{\theta}{360} \times 2\pi R = 2\pi r$

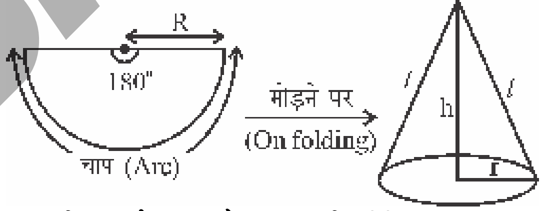
☞ **$r = \frac{\theta}{360} \times R$**

त्रिज्य खण्ड की त्रिज्या = शंकु की तिर्यक ऊँचाई

Radius of sector = Slant height of cone

☞ **R = ℓ**

➢



चाप की लम्बाई = शंकु के आधार की परिधि

Length of arc = Circumference of base of cone

$\frac{180}{360} \times 2\pi R = 2\pi r$

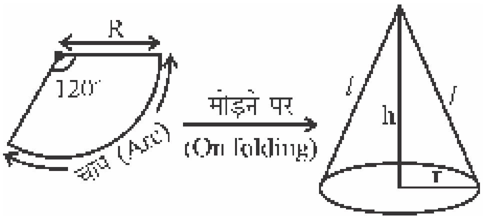
☞ **$r = \frac{1}{2} \times R$**

त्रिज्य खण्ड की त्रिज्या = शंकु की तिर्यक ऊँचाई

Radius of sector = Slant height of cone

☞ **R = ℓ**

➢



चाप की लम्बाई = शंकु के आधार की परिधि

Length of arc = Circumference of base of cone

$\frac{120}{360} \times 2\pi R = 2\pi r$

☞ **$r = \frac{1}{3} \times R$**

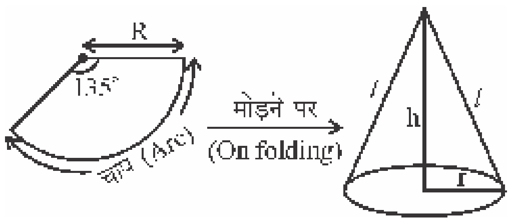
TEAM SPY

त्रिज्य खण्ड की त्रिज्या = शंकु की तिर्यक ऊँचाई

Radius of sector = Slant height of cone

☞ $\mathbf{R = \ell}$

➢



चाप की लम्बाई = शंकु के आधार की परिधि

Length of arc = Circumference of base of cone

$\frac{135}{360} \times 2\pi R = 2\pi r$

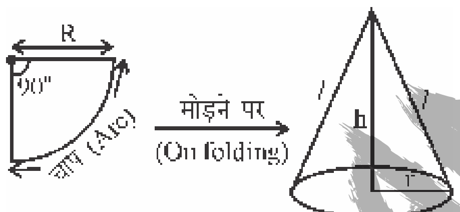
☞ $\mathbf{r = \frac{3}{8} \times R}$

त्रिज्य खण्ड की त्रिज्या = शंकु की तिर्यक ऊँचाई

Radius of sector = Slant height of cone

☞ $\mathbf{R = \ell}$

➢



चाप की लम्बाई = शंकु के आधार की परिधि

Length of arc = Circumference of base of cone

$\frac{90}{360} \times 2\pi R = 2\pi r$

☞ $\mathbf{r = \frac{1}{4} \times R}$

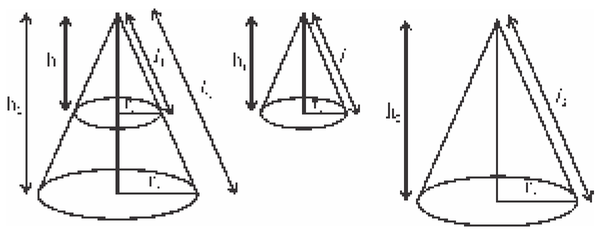
त्रिज्य खण्ड की त्रिज्या = शंकु की तिर्यक ऊँचाई

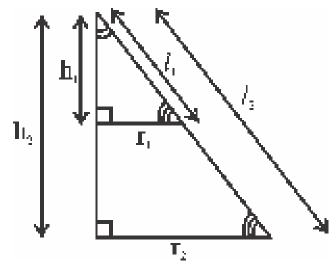
Radius of sector = Slant height of cone

☞ $\mathbf{R = \ell}$

शंकु को काटना (Cutting of cone)

■





➢ **लम्बाई का अनुपात (Ratio of length) :**

☞ $\mathbf{\frac{r_1}{r_2} = \frac{h_1}{h_2} = \frac{\ell_1}{\ell_2}}$

➢ **वक्रपृष्ठ क्षेत्रफल का अनुपात/Ratio of curved surface area (C.S.A.) :**

$\because \frac{C.S.A_1}{C.S.A_2} = \frac{\pi r_1 \ell_1}{\pi r_2 \ell_2}$

☞ $\mathbf{\frac{C.S.A_1}{C.S.A_2} = \frac{r_1 \ell_1}{r_2 \ell_2}}$

☞ $\mathbf{\frac{C.S.A_1}{C.S.A_2} = \frac{r_1 \ell_1}{r_2 \ell_2} = \frac{r_1^2}{r_2^2} = \frac{h_1^2}{h_2^2} = \frac{\ell_1^2}{\ell_2^2}}$

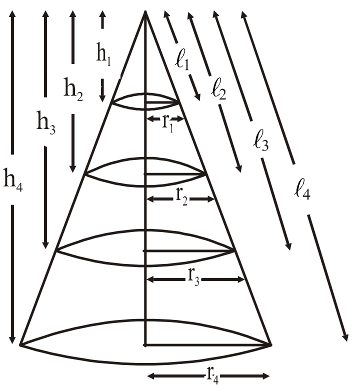
➢ **आयतन का अनुपात/Ratio of volume (V) :**

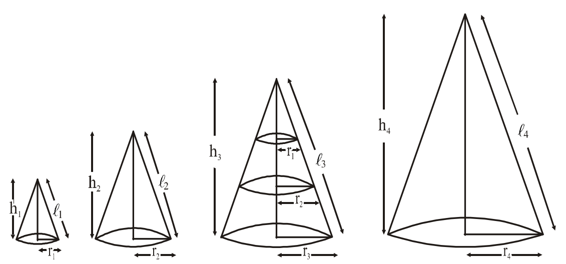
$\because \frac{V_1}{V_2} = \frac{\pi r_1^2 h_1}{\pi r_2^2 h_2}$

☞ $\mathbf{\frac{V_1}{V_2} = \frac{r_1^2 h_1}{r_2^2 h_2}}$

☞ $\mathbf{\frac{V_1}{V_2} = \frac{r_1^2 h_1}{r_2^2 h_2} = \frac{r_1^3}{r_2^3} = \frac{h_1^3}{h_2^3} = \frac{\ell_1^3}{\ell_2^3}}$

■





➢ **लम्बाई का अनुपात (Ratio of length) :**

☞ $r_1 : r_2 : r_3 : r_4 = h_1 : h_2 : h_3 : h_4 = \ell_1 : \ell_2 : \ell_3 : \ell_4$

➢ **वक्रपृष्ठ क्षेत्रफल का अनुपात/Ratio of curved surface area (C.S.A.) :**

☞ $CSA_1 : CSA_2 : CSA_3 : CSA_4 =$

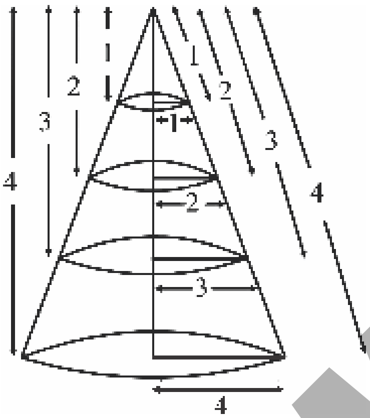
$h_1^2 : h_2^2 : h_3^2 : h_4^2 = r_1^2 : r_2^2 : r_3^2 : r_4^2 = \ell_1^2 : \ell_2^2 : \ell_3^2 : \ell_4^2$

➢ **आयतन का अनुपात/Ratio of volume (V) :**

☞ $V_1 : V_2 : V_3 : V_4 =$

$r_1^3 : r_2^3 : r_3^3 : r_4^3 = h_1^3 : h_2^3 : h_3^3 : h_4^3 = \ell_1^3 : \ell_2^3 : \ell_3^3 : \ell_4^3$

■



➢ **लम्बाई का अनुपात (Ratio of length) :**

☞ $r_1 : r_2 : r_3 : r_4 = h_1 : h_2 : h_3 : h_4$

$= \ell_1 : \ell_2 : \ell_3 : \ell_4 \Rightarrow 1 : 2 : 3 : 4$

➢ **वक्रपृष्ठ क्षेत्रफल का अनुपात/Ratio of curved surface area (C.S.A.) :**

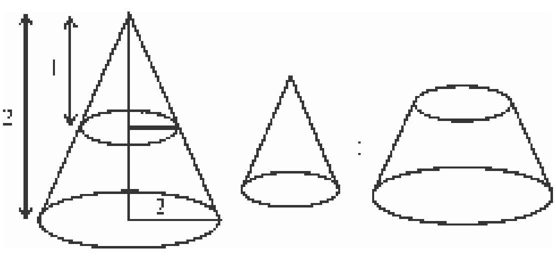
☞ $CSA_1 : CSA_2 : CSA_3 : CSA_4 = 1^2 : 2^2 : 3^2 : 4^2$

➢ **आयतन का अनुपात/Ratio of volume (V) :**

☞ $V_1 : V_2 : V_3 : V_4 = 1^3 : 2^3 : 3^3 : 4^3$

■ **वक्रपृष्ठ क्षेत्रफल के लिए/For curved surface area (C.S.A.) :**

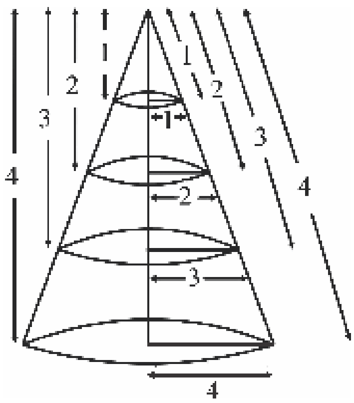
➢

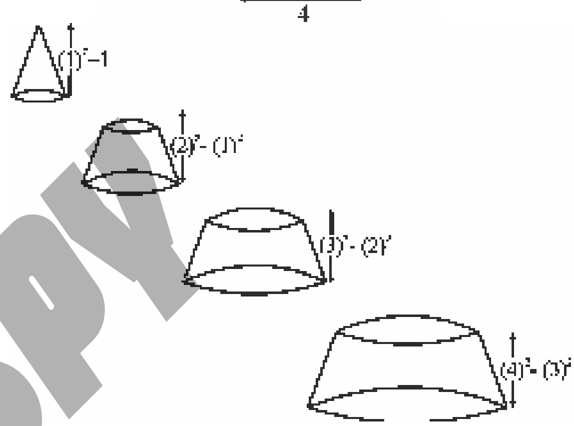


∵ Ratio of C.S.A. = $1^2 : 2^2 - 1^2$

☞ **Ratio of C.S.A. = 1 : 3**

➢

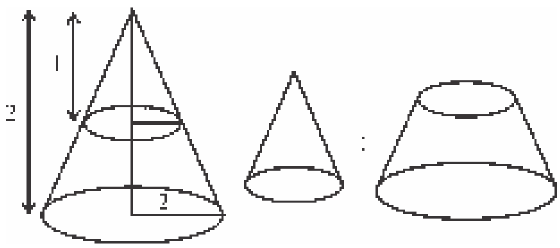




∵ Ratio of C.S.A. = $1^2 : 2^2 - 1^2 : 3^2 - 2^2 : 4^2 - 3^2$

☞ **Ratio of C.S.A. = 1 : 3 : 5 : 7**

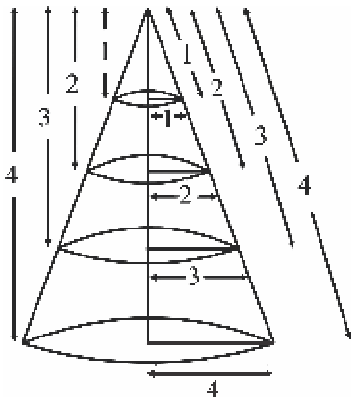
■ **आयतन के लिए/For Volume (V) :**



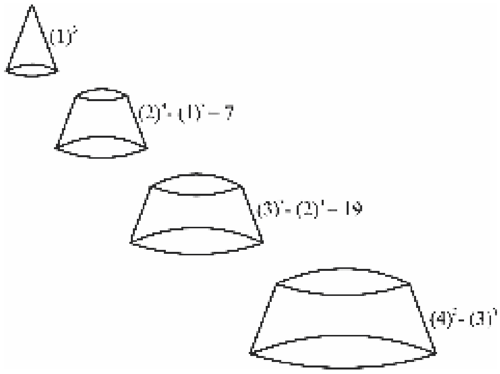
∵ Ratio of Volume = $(1)^3 : (2)^3 - (1)^3$

☞ **Ratio of Volume = 1 : 7**

➢



TEAM SPY



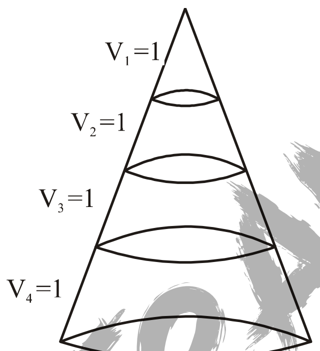
$\because$ Ratio of Volume = $1^3 : 2^3 - 1^3 : 3^3 - 2^3 : 4^3 - 3^3$

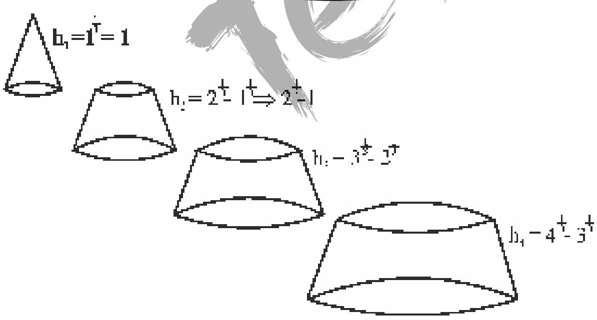
Ratio of Volume = $1 : (8-1) : (27-8) : (64-27)$

☞ **Ratio of Volume = 1 : 7 : 19 : 37**

■ **यदि उनके सभी भागों का आयतन 1 : 1 : 1 में हो तो उनकी ऊँचाईयों का अनुपात होगा–**

If Ratio of volume of all parts is 1 : 1 : 1 then ratio of heights will be :



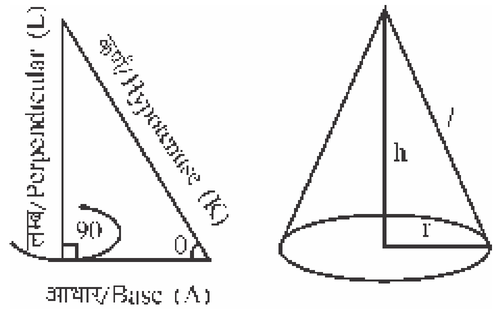


$\therefore h_1 : h_2 : h_3 : h_4 = 1 : \left(2^{\frac{1}{3}} - 1\right) : \left(3^{\frac{1}{3}} - 2^{\frac{1}{3}}\right) : \left(4^{\frac{1}{3}} - 3^{\frac{1}{3}}\right)$

समकोण त्रिभुज को घुमाना
(Rotating the right angle triangle)

■ **समकोण Δ को लम्ब के परितः घुमाने पर प्राप्त आकृति-**

The shape formed by rotating the right angle triangle to the perpendicular :



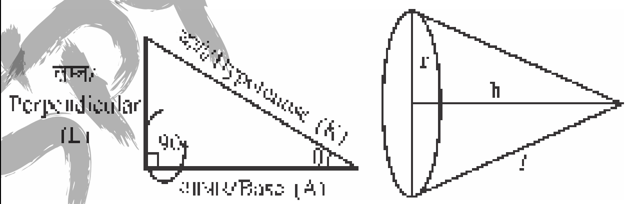
☞ **r = A**

☞ **h = P**

☞ ***l* = K**

■ **समकोण Δ को आधार के परितः घुमाने पर प्राप्त आकृति-**

The shape formed by rotating right angle triangle to the base:



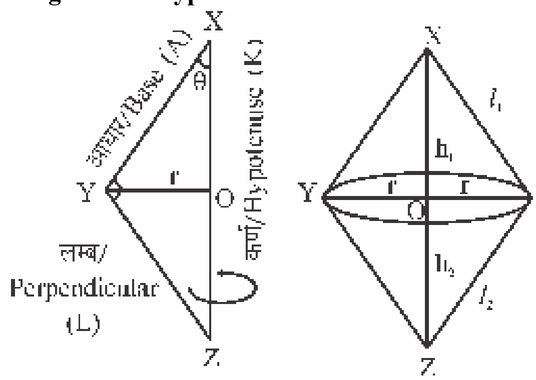
☞ **r = L**

☞ **h = A**

☞ ***l* = K**

■ **समकोण त्रिभुज को कर्ण के परितः घुमाने पर प्राप्त आकृति-**

The shape formed by rotating the right angle triangle to the hypotenuse:



☞ $l_1 = A$

☞ $l_2 = L$

In Δ XYZ, Δ के क्षेत्रफल से

$\frac{1}{2} \times L \times A = \frac{1}{2} \times K \times r$

☞ $r = \frac{L \times A}{K}$

$\Delta XYO \sim \Delta XYZ$

$$\frac{XY}{XZ} = \frac{XO}{XY} = \frac{OY}{YZ}$$

तब/then,

$$\frac{XY}{XZ} = \frac{XO}{XY}$$

$$\frac{A}{K} = \frac{XO}{A}$$

$$\mathbf{XO = \frac{A^2}{K}}$$

☞ $\mathbf{h_1 = \frac{A^2}{K}}$

इसी प्रकार/Similarly,

$\Delta XZO \sim \Delta XYZ$

$$\frac{YZ}{XZ} = \frac{OZ}{YZ} = \frac{OY}{XY}$$

तब/then,

$$\frac{YZ}{XZ} = \frac{OZ}{YZ}$$

$$\frac{L}{K} = \frac{OZ}{L}$$

$$\mathbf{OZ = \frac{L^2}{K}}$$

☞ $\mathbf{h_2 = \frac{L^2}{K}}$

- **दोनों शंकु का आयतन (Volume of both cone) :**

$$\frac{1}{3}\pi r^2 h_1 + \frac{1}{3}\pi r^2 h_2$$

$$= \frac{1}{3}\pi r^2 [h_1 + h_2]$$

$$= \frac{1}{3}\pi \left(\frac{L\times A}{K}\right)^2 \times \left(\frac{A^2}{K} + \frac{L^2}{K}\right)$$

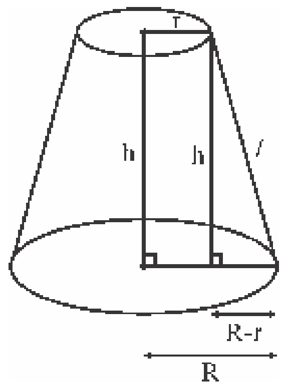
$$= \frac{1}{3}\pi \frac{L^2\times A^2}{K^2} \times \frac{A^2+L^2}{K}$$

$$= \frac{1}{3}\pi \frac{L^2\times A^2}{K^2} \times \frac{K^2}{K}$$

☞ **दोनों शंकु का आयतन (Volume of both cone)**

$$= \mathbf{\frac{1}{3}\pi \frac{L^2\times A^2}{K}}$$

छिन्नक (Frustum)



- **त्रिर्यक ऊँचाई/Slant height (ℓ)**

  पाइथागोरस प्रमेय से/by Pythagoras theorem,

  $\ell^2 = h^2 + (R - r)^2$

  ☞ $\mathbf{\ell = \sqrt{h^2 + (R - r)^2}}$

- **आयतन/Volume (V)**

  ☞ $\mathbf{V = \frac{1}{3}\pi(R^2 + r^2 + Rr)h}$

- **वक्रपृष्ठ क्षेत्रफल/Curved surface area (C.S.A.)**

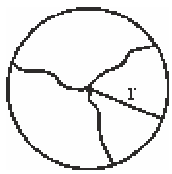
  ☞ $\mathbf{C.S.A = \pi(R + r)\ell}$

- **सम्पूर्ण पृष्ठ क्षेत्रफल/Total surface area (T.S.A.)**

  $T.S.A = \pi(R + r)\ell + \pi r^2 + \pi R^2$

  ☞ $\mathbf{T.S.A = \pi(R + r)\ell + \pi(R^2 + r^2)}$

गोला (Sphere)



- **आयतन/Volume (V)**

  ☞ $\mathbf{V = \frac{4}{3}\pi r^3}$

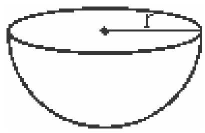
- **वक्रपृष्ठ क्षेत्रफल/Curved surface area (C.S.A.)**

  ☞ $\mathbf{C.S.A = 4\pi r^2}$

- **सम्पूर्ण पृष्ठ क्षेत्रफल/Total surface area (T.S.A.)**

  ☞ $\mathbf{T.S.A = 4\pi r^2}$

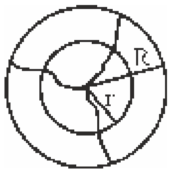
अर्द्धगोला (Hemisphere)



TEAM SPY

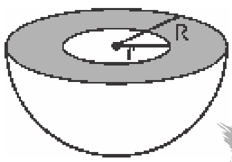
- **आयतन/Volume (V)**
  - ☞ $\mathbf{V = \frac{2}{3}\pi r^3}$
- **वक्रपृष्ठ क्षेत्रफल/Curved surface area (C.S.A.)**
  - ☞ $\mathbf{C.S.A = 2\pi r^2}$
- **सम्पूर्ण पृष्ठ क्षेत्रफल/Total surface area (T.S.A.)**
  - T.S.A = $2\pi r^2 + \pi r^2$
  - ☞ $\mathbf{T.S.A = 3\pi r^2}$

खोखला गोला (Hollow Sphere)



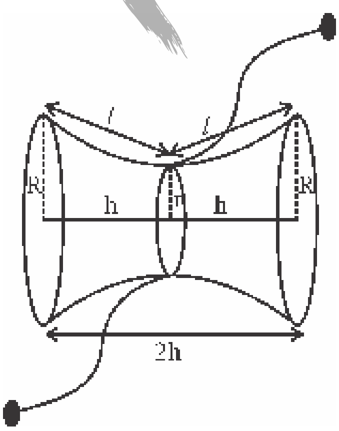
- **आयतन/Volume (V)**
  - ☞ $\mathbf{V = \frac{4}{3}\pi(R^3 - r^3)}$

कटोरा (गोलार्ध खोल) (Hemispherical Shell)



- **आयतन/Volume (V)**
  - ☞ $\mathbf{V = \frac{2}{3}\pi(R^3 - r^3)}$

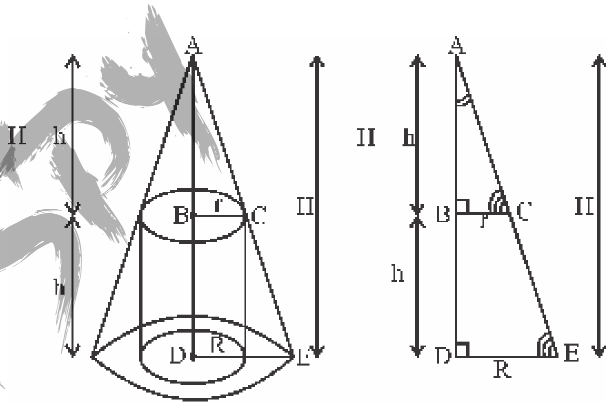
डमरू (Damru)



- **तिर्यक ऊँचाई/Slant height (l)**
  - ☞ $\mathbf{l = \sqrt{h^2 + (R - r)^2}}$
- **वक्रपृष्ठ क्षेत्रफल/Curved surface area (C.S.A.)**
  - ☞ $\mathbf{C.S.A. = 2\pi (R + r)l}$
- **सम्पूर्ण पृष्ठ क्षेत्रफल/Total surface area (T.S.A.)**
  - T.S.A. = $2\pi (R + r)l + 2\pi R^2$
  - ☞ $\mathbf{T.S.A. = 2\pi(Rl + rl + R^2)}$
- **आयतन/Volume (V)**
  - ☞ $\mathbf{V = \frac{2}{3}\pi\left(R^2 + r^2 + Rr\right)h}$

आकृति के अंदर आकृति का अधिकतम आयतन (Maximum Volume of figure inside figure)

■ **शंकु के अंदर बेलन का अधिकतम आयतन (Maximum Volume of a Cylinder inscribed in a cone) :**



Δ ABC ~ Δ ADE

समरूपता से/by similarity

$$\frac{r}{R} = \frac{H - h}{H}$$

$$\frac{r}{R} = 1 - \frac{h}{H}$$

$$\frac{h}{H} = 1 - \frac{r}{R}$$

☞ $\mathbf{h = \left(1 - \frac{r}{R}\right) H}$

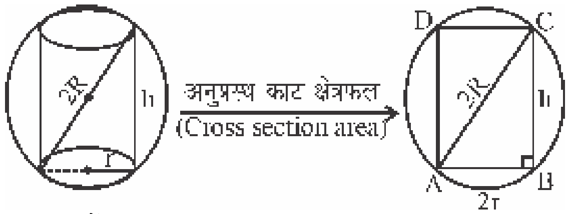
☞ $\mathbf{V_{max} = \frac{4}{27}\pi R^2 H}$

☞ $\mathbf{V_{max} = \frac{4}{9} \times \frac{1}{3}\pi r^2 H}$

☞ $\mathbf{V_{max} = \frac{4}{9} \times}$ **Volume of cone**

■ **गोला के अंदर बेलन का अधिकतम आयतन (Maximum volume of cylinder inscribed in a sphere) :**

TeAM SPY



Δ ABC में/In Δ ABC

पाइथागोरस प्रमेय से/by Pythagoras theorem

$(2R)^2 = (2r)^2 + h^2$

$4R^2 = 4r^2 + h^2$

$4r^2 = 4R^2 - h^2$

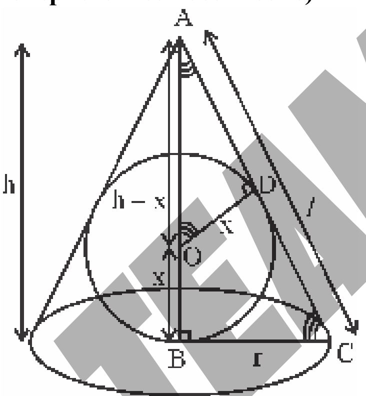
☞ $\mathbf{r^2 = \dfrac{4R^2 - h^2}{4}}$

☞ $\mathbf{V_{max} = \dfrac{4}{3\sqrt{3}}\pi R^3}$

☞ $\mathbf{V_{max} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \times \dfrac{4}{3}\pi R^3}$

☞ $\mathbf{V_{max} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}}$ **× volume of sphere**

■ **शंकु के अंदर गोले का अधिकतम आयतन (Maximum volume of sphere inscribed a cone) :**



Δ ABC ~ Δ ADO

समरूपता से/by similarity

$\dfrac{x}{r} = \dfrac{h-x}{\ell}$

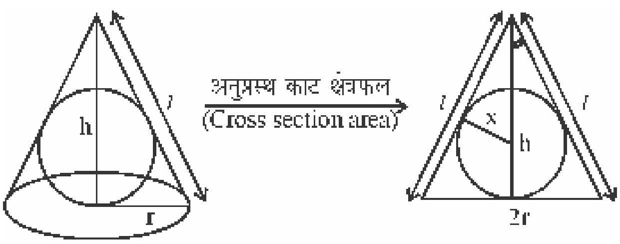
$x\ell = hr - rx$

$x\ell + xr = hr$

$x(\ell + h) = hr$

☞ $\mathbf{x = \dfrac{hr}{(\ell + r)}}$

अथवा/or



$\because$ अंतःवृत्त की त्रिज्या (In radius) $= \dfrac{\Delta}{S}$

$x = \dfrac{\Delta}{S}$

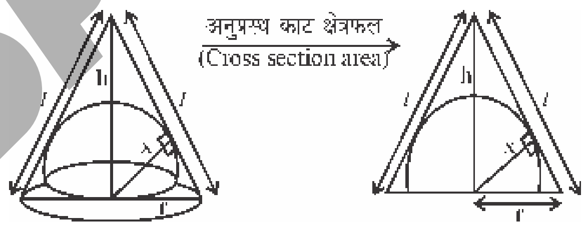
$x = \dfrac{\frac{1}{2} \times 2r \times h}{\frac{(\ell + \ell + 2r)}{2}}$

☞ $\mathbf{x = \dfrac{hr}{\ell + r}}$

☞ $\mathbf{V_{max} = \dfrac{4}{3}\pi x^3}$

☞ $\mathbf{V_{max} = \dfrac{4}{3} \times \pi \left(\dfrac{hr}{\ell + r}\right)^3}$

■ **शंकु के अंदर अर्द्ध गोले का अधिकतम आयतन (Maximum volume of hemisphere inscribed a cone) :**



$\because$ त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \dfrac{1}{2} \times$ आधार $\times$ ऊँचाई

Area of triangle $= \dfrac{1}{2} \times$ base $\times$ height

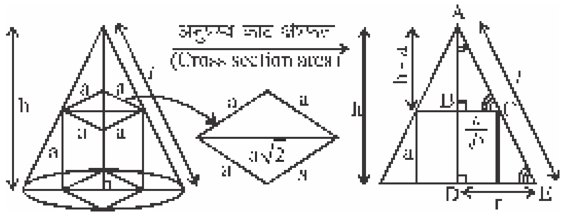
$\Rightarrow \dfrac{1}{2} \times h \times r = \dfrac{1}{2} \times x \times \ell$

☞ $x = \dfrac{hr}{\ell}$

☞ $\mathbf{V_{max} = \dfrac{2}{3}\pi x^3}$

☞ $\mathbf{V_{max} = \dfrac{2}{3} \times \pi \left(\dfrac{hr}{\ell}\right)^3}$

■ **शंकु के अंदर अधिकतम आयतन का घन (Maximum volume of cube inscribed a cone):**



TEAM SPY

$$BC = \frac{\text{विकर्ण (diagonal)}}{2}$$

$$BC = \frac{a\sqrt{2}}{2} \quad \frac{a}{\sqrt{2}}$$

Δ ABC ~ Δ ADE

समरूपता से/by similarity

$$\frac{\frac{a}{\sqrt{2}}}{r} = \frac{h-a}{h}$$

$$\frac{a}{\sqrt{2}r} = \frac{h-a}{h}$$

$$ah = \sqrt{2}\,rh - \sqrt{2}\,ar$$

$$ah + \sqrt{2}\,ar = \sqrt{2}\,rh$$

$$a(h + \sqrt{2}\,r) = \sqrt{2}\,rh$$

☞ $\mathbf{a = \frac{\sqrt{2}\,rh}{\sqrt{2}\,r + h}}$

☞ $\mathbf{V_{max} = a^3}$

☞ $\mathbf{V_{max} = \left(\frac{\sqrt{2}\,rh}{\sqrt{2}\,r + h}\right)^3}$

प्रिज्म और पिरामिड (Prism & Pyramid)

प्रिज्म (Prism)

■ किसी बहुभुज (त्रिभुज, चतुर्भुज, पंचभुज, षटभुज) को आधार बनाकर उसकी भुजाओं पर आयताकार फलके ऊर्ध्वाधर खड़ी करके उसके आधार के सर्वांगसम बहुभुज का ढक्कन रख दिया जाएं तो इससे बना ठोस प्रिज्म कहलाता है।

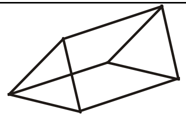
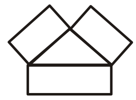
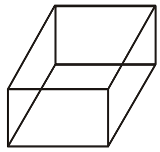
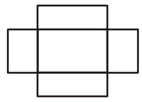
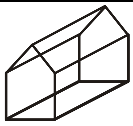
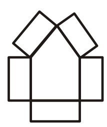
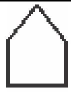
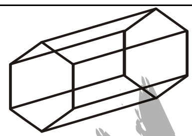
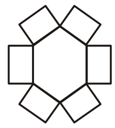
If any polygon (triangle, quadrilateral, pentagon, hexagon) is taken as its base and rectangular faces are vertically placed on its sides and the lid of the polygon congruent to its base is placed, then the solid formed from it is called a prism.

Or

■ प्रिज्म एक ठोस होता है जिसके दो फलक समान्तर और सर्वांगसम होते हैं और उनके फलक (बहुभुज) शीर्ष से जुड़ते हैं। प्रिज्म में आधार के रूप में एक बहुभुज होता है। और ऊर्ध्वाधर भुजा आधार के लम्बवत् होती है।

A prism is a solid that has two faces that are parallel and congruent and their faces (Polygon) join by vertex to vertex. A prism has a polygon as its base and vertical side perpendicular to the base.

समझ के लिए: For understanding:

 त्रिभुज → Triangle	
 चतुर्भुज → Quadrilateral	
 पंचभुज → Pentagon	 
 षटभुज → Hexagon	

फलक (face) :

➢ किसी भी आकृति में जो सतह होती है वह फलक कहलाती है।

The surface of any shape is called a face.

पार्श्वफलक (Lateral surface/face) :

➢ आधार की भुजाओं पर जो आयताकार फलकें खड़ी की जाती है उन्हें पार्श्व फलक कहते हैं।

The rectangular faces placed on the sides of the base are called lateral surface.

पार्श्व फलकों की संख्या (No. of lateral surface) = आधार की भुजाओं की संख्या (No. of sides of base)

कुल फलकों की संख्या = पार्श्वफलकों की संख्या + 2
No. of total surface = No. of lateral surface + 2

कोर (किनारा) (Edge) :

➢ जहाँ पर दो सतह मिलती है उसे किनारा कहते हैं।

The place where two surfaces meet is called an edge.

किनारो/कोरों की संख्या = भुजाओं की संख्या × 3
No. of edges = No. of sides × 3

शीर्ष (Vertex) :

➢ जहाँ पर तीन सतह मिलती है उसे शीर्ष कहते हैं।

The place where three surfaces meet is called a vertex.

शीर्षों की संख्या = भुजाओं की संख्या × 2
No. of Vertex = No. of sides × 2

सभी आकृतियाँ एक साथ
(All figures all together)

आकृति (Figure)	पार्श्व फलक Lateral surface	सम्पूर्ण फलक Total Surface	कोर edge	शीर्ष Vertex
त्रिभुज (Triangle)	3	5	9	6
चतुर्भुज (Quadrilateral)	4	5	12	8
पंचभुज (Pentagon)	5	7	15	10
षट्भुज (Hexagon)	6	8	18	12
सप्तभुज (Heptagon)	7	9	21	14
अष्ठभुज (Octagon)	8	10	24	16
नौभुज (Nonagon)	9	11	27	18
दसभुज (Decagon)	10	12	30	20

प्रिज्म के लिए सामान्य सूत्र (General formula for a prism)

☞ पार्श्व पृष्ठ का क्षेत्रफल = आधार का परिमाप × ऊँचाई
Lateral surface area = Perimeter of base × Height
L.S.A. = Perimeter of Base × h

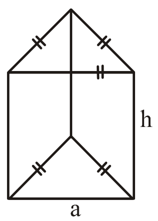
☞ सम्पूर्ण पृष्ठ क्षेत्रफल = पार्श्व पृष्ठ क्षे० + 2 × आधार का क्षे०
T.S.A. = L.S.A. + 2× Area of Base

☞ प्रिज्म का आयतन = आधार का क्षे० × ऊँचाई
Volume = Area of base × height

☞ $V = \frac{\eta a^2}{4} \text{Cot} \frac{\pi}{4} \times h$

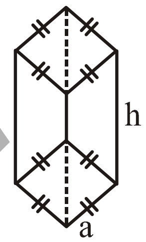
कुछ महत्वपूर्ण प्रिज्म (Some Important Prism)

समबाहु त्रिभुजाकार प्रिज्म (Equilateral triangular prism)



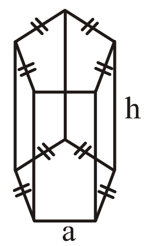
- आधार/छत का क्षेत्रफल/Base/ceiling area (A)
  ☞ $A = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$
- पार्श्व पृष्ठ क्षेत्रफल/Lateral surface area (L.S.A.)
  ☞ L.S.A. = 3ah
- सम्पूर्ण पृष्ठ क्षेत्रफल/Total surface area (T.S.A.)
  ☞ $T.S.A. = 3ah + 2 \times \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$
- आयतन/Volume (V)
  ☞ $V = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 h$

वर्गाकार प्रिज्म (Square Prism)



- आधार/छत का क्षेत्रफल/Base/ceiling area (A)
  ☞ $A = a^2$
- पार्श्व पृष्ठ क्षेत्रफल/Lateral surface area (L.S.A.)
  ☞ L.S.A. = 4ah
- सम्पूर्ण पृष्ठ क्षेत्रफल/Total surface area (T.S.A.)
  ☞ $T.S.A. = 4ah + 2a^2$
- आयतन/Volume (V)
  ☞ $V = a^2 h$

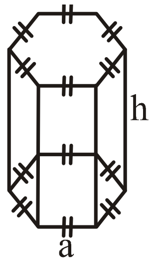
समपंचभुज प्रिज्म (Pentagonal Prism)



- आधार/छत का क्षेत्रफल/Base/ceiling area (A)
  ☞ $A = \sqrt{3} a^2$
- पार्श्व पृष्ठ क्षेत्रफल/Lateral surface area (L.S.A.)
  ☞ L.S.A. = 5ah
- सम्पूर्ण पृष्ठ क्षेत्रफल/Total surface area (T.S.A.)
  ☞ $T.S.A. = 4ah + 2\sqrt{3} a^2$
- आयतन/Volume (V)
  ☞ $V = \sqrt{3} a^2 h$

TEAM SPY

समषटभुज प्रिज्म (Hexagonal Prism)



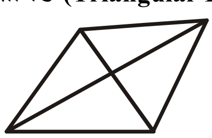
- **आधार/छत का क्षेत्रफल/Base/ceiling area (A)**
  - ☞ $\mathbf{A = \frac{3\sqrt{3}}{2} a^2}$
- **पार्श्व पृष्ठ क्षेत्रफल/Lateral surface area (L.S.A.)**
  - ☞ **L.S.A. = 6ah**
- **सम्पूर्ण पृष्ठ क्षेत्रफल/Total surface area (T.S.A.)**

  $\text{T.S.A.} = 6ah + \frac{3\sqrt{3}}{2} a^2 \times 2$
  - ☞ $\mathbf{T.S.A. = 6ah + 3\sqrt{3}\, a^2}$
- **आयतन/Volume (V)**
  - ☞ $\mathbf{V = \frac{3\sqrt{3}}{2} a^2 h}$

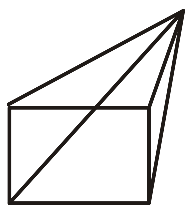
पिरामिड (Pyramid)

■ किसी बहुभुज (त्रिभुज, चतुर्भुज, पंचभुज, षटभुज आदि) को आधार बनाकर, उसकी भुजाओं पर त्रिभुजाकार फलकें इस प्रकार खड़ी की जाए कि सभी फलकों के शीर्ष एक बिन्दु पर मिलें तो इस प्रकार बनी आकृति को पिरामिड कहते हैं।
If any polygon (triangle, quadrilateral Pentagon, hexagon etc.) is made its base and triangular faces are erected on its sides in such a way that the vertices of all the faces meet at one point, then the shape (figure) thus formed is called a pyramid.

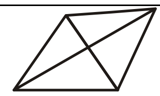
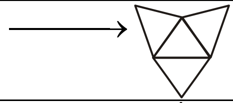
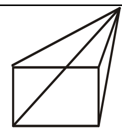
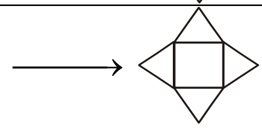
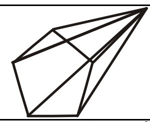
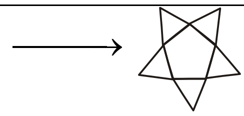
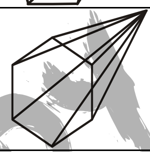
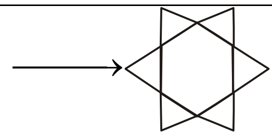
Ex.: त्रिभुजाकार पिरामिड (Triangular Pyramid):



वर्गाकार पिरामिड (Square Pyramid):

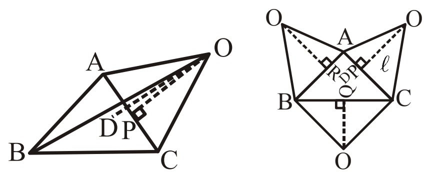


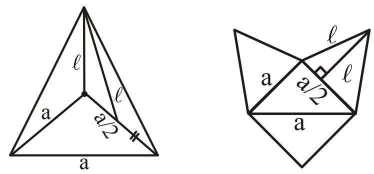
समझने के लिए (For understanding)

Closed figure (बन्द आकृति)	**Open Figure** (खुली आकृति)
	
	
	
	

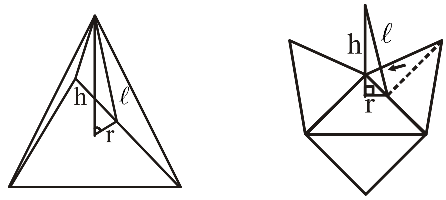
- शीर्षो की कुल संख्या = आधार में भुजाओं की संख्या मुख्य शीर्ष
  Total no. of vertices = No. of sides in base + main vertices
- पार्श्वफलकों की संख्या = आधार में भुजाओं की संख्या
  No. of lateral surfaces = No. of sides in base
- फलकों की कुल संख्या = आधार में भुजाओं की संख्या + 1
  Total No. of surface = No. of sides in base + 1
- तिर्यक (तिरक्षी) कोरों की संख्या = आधार में भुजाओं की संख्या
  No. of slant edges = No. of sides in Base.
- कोरों की कुल संख्या = आधार में भुजाओं की संख्या × 2
  Total No. of edges = No. of sides in base × 2

पिरामिड की महत्वपूर्ण शब्दावली (Important terms of Pyramid)

- 

  - ☞ **OA = OB = OC = Slant edge (तिर्यक कोर)**
  - ☞ **OP = OR = OQ = Slant height (तिर्यक ऊँचाई)**
  - ☞ **DO = Height (लम्बवत ऊँचाई)**
- 

  - ☞ $\ell^2 = \ell^2 + \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{2}}^{2}$

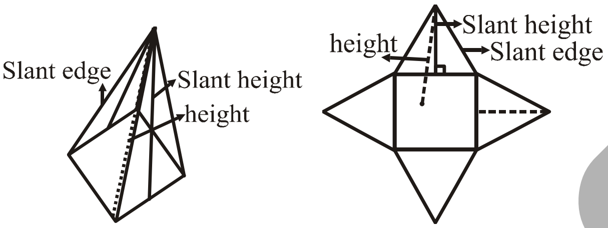
➢ 

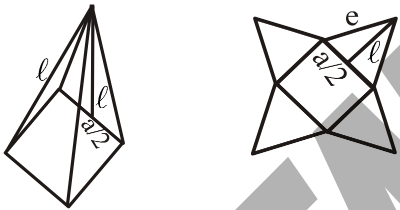
☞ $\ell^2 = h^2 + r^2$

➢

☞ $\ell^2 = h^2 + R^2$

➢ **Main Vertex (मुख्य शीर्ष) Apex**

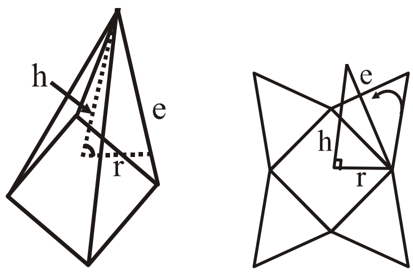


➢ 

☞ $e^2 = \ell^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$

➢

☞ $\ell^2 + h^2 + r^2$

➢ 

☞ $e^2 = h^2 + R^2$

एक नियमित पिरामिड के लिए सामान्य सूत्र
(General formula for a regular pyramid)

☞ पार्श्व पृष्ठ क्षेत्रफल

$$= \frac{1}{2} \times \text{आधार का परिमाप} \times \text{तिर्यक ऊँचाई}$$

Lateral surface area (L.S.A.)

$$= \frac{1}{2} \times \text{Perimeter of base} \times \text{Slant height}$$

☞ सम्पूर्ण पृष्ठ क्षेत्रफल = पार्श्वपृष्ठ क्षे. + आधार का क्षे.

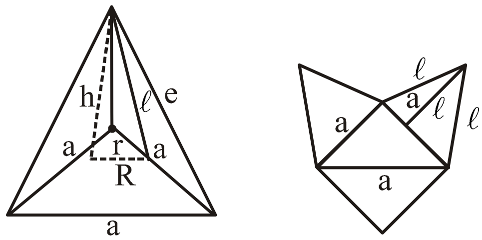
T.S.A. = L.S.A + Area of Base

☞ आयतन $= \frac{1}{3} \times$ आधार का क्षेत्रफल $\times$ ऊँचाई

$V = \frac{1}{3} \times$Area of Base $\times$ height

कुछ महत्वपूर्ण पिरामिड
(Some Important Pyramid)

समबाहु त्रिभुजाकार पिरामिड
(Equilateral triangular Pyramid)



☞ **L.S.A=** $\frac{1}{2} \times 3a \times \ell$

☞ **T.S.A= L.S.A.+** $\frac{\sqrt{3}}{4} a^2$

☞ **V =** $\frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times a^2 \times h$

$\because \ell = \sqrt{h^2 + r^2}$ & $r = \frac{a}{2\sqrt{3}}$

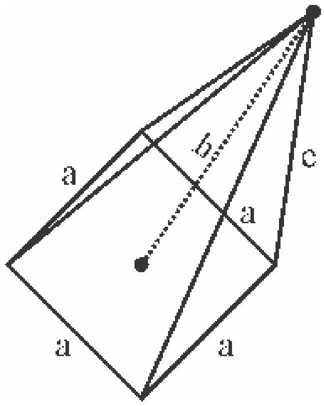
☞ $\ell = \sqrt{h^2 + \left(\frac{a}{2\sqrt{3}}\right)^2}$

$\because$ $e = \sqrt{h^2 + R^2}$ & $R = \frac{a}{\sqrt{3}}$

☞ $e = \sqrt{h^2 + \left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2}$

TEAM SPY

वर्गाकार पिरामिड (Square Pyramid)



☞ **L.S.A = $\frac{1}{2} \times 4a \times \ell$**

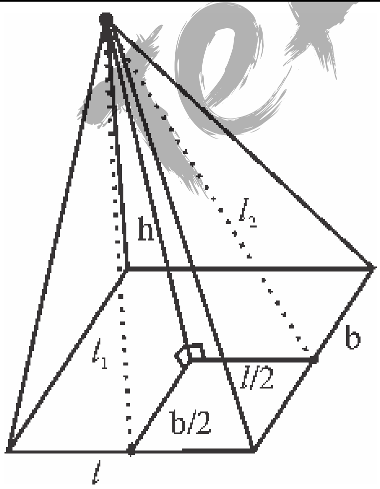
☞ **T.S.A = L.S.A.+ a^2**

☞ **V=$\frac{1}{3}a^2 \times h$**

☞ $\ell = \sqrt{h^2 + \frac{a}{2}^{2}}$

☞ $e = \sqrt{h^2 + \frac{a}{\sqrt{2}}^{2}}$

आयताकार पिरामिड (Rectangular Pyramid)



➢ **दो तिरक्षी ऊँचाइयाँ होती है। (There are two slant height)**

➢ **पहली तिरछी ऊँचाई (First slant height)**

$\ell_1 = \sqrt{h^2 + \frac{b}{2}^{2}}$

➢ **दूसरी तिरछी ऊँचाई (Second slant height)**

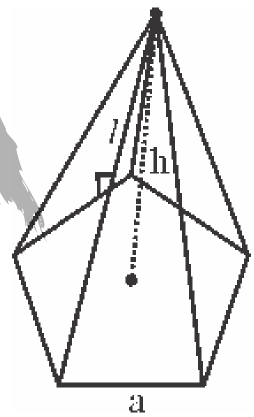
$\ell_2 = \sqrt{h^2 + \frac{1}{2}^{2}}$

☞ **L.S.A = 2 $\frac{1}{2} \times \ell \times \ell_1$ +2 $\frac{1}{2} \times b \times \ell_2$**

☞ **T.S.A = L.S.A. + $\ell \times b$**

☞ **V = $\frac{1}{3} \times \ell \times b \times h$**

पंचभुज पिरामिड (Pentagonal Pyramid)



☞ **आधार का क्षेत्रफल (Area of base) = $\sqrt{3}\,a^2$**

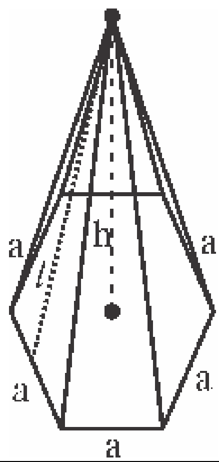
$\because$ **L.S.A= 5 $\frac{1}{2} a \times \ell$**

☞ **L.S.A= $\frac{5}{2} \times a\,\ell$**

☞ **T.S.A= L.S.A.+ $\sqrt{3}\,a^2$**

☞ **V = $\frac{1}{3} \times \sqrt{3}\,a^2 \times h$**

षटभुज पिरामिड (Hexagonal Pyramid)



∵ आधार का क्षेत्रफल (Area of base) = $6\times\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

☞ **आधार का क्षेत्रफल (Area of base) =** $\mathbf{\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2}$

∵ $L.S.A=\frac{1}{2}\times 6a\times\ell$

☞ **L.S.A= 3a** $\boldsymbol{\ell}$

☞ **T.S.A= L.S.A.+**$\mathbf{\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2}$

∵ $V=\frac{1}{3}\times\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2\times h$

☞ $\mathbf{V=\frac{\sqrt{3}}{2}a^2h}$

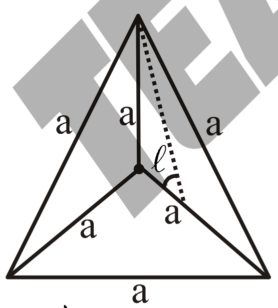
तिरछी ऊँचाई /Slant height (ℓ)

☞ $\boldsymbol{\ell=\sqrt{h+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2}}$

तिरछी कोर /Slant Edge (E)

☞ $\mathbf{E=\sqrt{h^2+a^2}}$

समचतुष्फलक (Tetrahedron)



➢ चार समबाहु फलक हैं।

There are four equilateral faces.

➢ सभी किनारे लम्बाई में बराबर अर्थात तिरक्षी कोर लम्बाई में बराबर है।

All edge are equal in length i.e. slant edge is same as side of base.

☞ **तिर्यक ऊँचाई/Slant height (ℓ) =** $\mathbf{\frac{\sqrt{3}}{2}a}$

∵ L.S.A = Area of 3 equilateral triangle

☞ $\mathbf{L.S.A=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\times 3}$

∵ T.S.A = Area of 4 equilateral triangle

$T.S.A.=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\times 4$

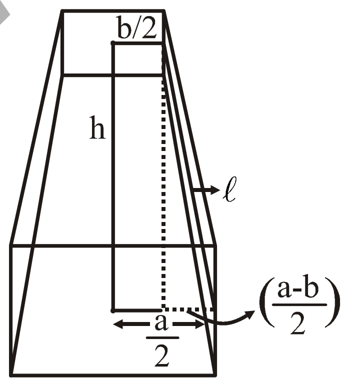
☞ $\mathbf{T.S.A.=\sqrt{3}a^2}$

☞ **ऊँचाई (Height) =** $\mathbf{\sqrt{a^2-\left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2}}$

∵ $V=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\times\sqrt{\frac{2}{3}}a$

☞ $\mathbf{V=\frac{\sqrt{2}}{12}a^3}$

पिरामिड का छिन्नक (Frustum of Pyramid)



☞ $\boldsymbol{\ell=\sqrt{h^2+\left(\frac{a-b}{2}\right)^2}}$

☞ $\mathbf{L.S.A=\frac{1}{2}(P_1+P_2)\times\ell}$

☞ $\mathbf{V=\frac{1}{3}(A_1+A_2+\sqrt{A_1A_2})\,h}$

जहाँ/Where,

$P_1, P_2\rightarrow$ आधारों का परिमाप

(Perimeter of Base)

$A_1, A_2\rightarrow$ आधारों का क्षेत्रफल

(Area of Base)

TEAM SPY

21 बीजगणित (Algebra)

■ **व्यंजक (Expression):–**

''चरों के बीच के समबन्ध को व्यंजक कहते है''

"Relation between variables called expression"

> $w = x + y^3 + z^2$ व्यंजक (Expression)
>
> w, x, y, z चर (Variable)
>
> → w परतंत्र चर (Dependent variable)
>
> → x, y, z स्वतंत्र चर (Independent variable)
>
> ✍ w का मान x, y, और z पर निर्भर कर रहा है।
> The value of w depends on x, y and z.

■ **बहुपद (Polynomial):–**

बहुपद एक ऐसा व्यंजक है जिसमें एक ही चर होता है तथा उस चर की घात धनात्मक पूर्णांक होनी चाहिए।''

"Polynomial is an expression in which only one variable and the degree of that variable must be a positive and the degree of the variable must be a positive integers."

☞ $\mathbf{x^2 + y^2 + z^2}$

दिया गया व्यंजक बहुपद नहीं है, क्योंकि एक से ज्यादा चर है। (The given expression is not a polynomial because there is more than variable).

☞ $\mathbf{x^3 + \frac{1}{x^3}}$

दिया गया व्यंजक बहुपद नहीं है, क्योंकि एक चर में ऋणात्मक घात है। (The given expression is not a polynomial because one of the variables has a negative degree)

☞ $\mathbf{x + \sqrt{x}}$

दिया गया व्यंजक बहुपद नहीं है, क्योंकि घात पूर्णांक नहीं है। (The given expression is not a polynomial because the power is not an integer)

☞ $\mathbf{x^2 + x + 1}$

दिया गया व्यंजक बहुपद है, क्योंकि एक ही चर है तथा घात धनात्मक पूर्णांक होनी चाहिए (The given expression is a polynomial because there is only one variable and the degree is a positive integer)

■ **बहुपद की कोटि (Degree of polynomial):–**

चर की अधिकतम घात को बहुपद की कोटि कहते है। (The highest degree of the variable is called the degree of the polynomial).

➢ **रेखीय बहुपद (Linear polynomial)**

ऐसा बहुपद जिसकी घात एक हो। (A polynomial with degree is one)

Ex. $x + 1$, $3x + 2$

➢ **द्विघात बहुपद (Quadratic Polynomial)**

ऐसा बहुपद जिसकी घात दो हो। (A polynomial with degree is two)

Ex. $x^2 + x + 1$, $x^2 + 3$

➢ **त्रिघात बहुपद (Cubic polynomial)**

ऐसा बहुपद जिससे घात तीन हो त्रिघात बहुपद कहलाता है। (A polynomial with degree is three)

Ex. $x^3 + x^2 + 1$, $x^3 + 8$

महत्वपूर्ण व्यंजक/सूत्र (Important expression/formula)

➢ $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$

➢ $(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$

➢ $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

➢ $(a + b)^2 = (a - b)^2 + 4ab$

➢ $(a - b)^2 = (a + b)^2 - 4ab$

➢ $(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2)$

➢ $(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab$

➢ $(ax + by)^2 + (ax - by)^2 = (a^2 + b^2)(x^2 + y^2)$

➢ $(ax + by)^2 - (ax - by)^2 = 4abxy$

➢ $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$

➢ $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$
$= a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2$

➢ $(a - b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b)$
$= a^3 - b^3 - 3a^2b + 3ab^2$

➢ $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 + b^2 - ab)$
$= (a + b)^3 - 3ab(a + b)$

➢ $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + b^2 + ab)$
$= (a - b)^3 + 3ab(a - b)$

➢ $x^n - y^n = (x - y)\left(x^{n-1}y^0 + x^{n-2}y^1 + x^{n-3}y^2 + \ldots\ldots + xy^{n-2} + x^0y^{n-1}\right)$

➢ $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$

$(a\ \ b\ \ c)\frac{1}{2}\ (a\ \ b)^2\ \ (b\ \ c)^2\ \ (c\ \ a)^2$

$(a\ \ b\ \ c)\ (a^2\ \ b^2\ \ c^2)\ \ (ab\ \ bc\ \ ca)$

$(a\ \ b\ \ c)\ (a\ \ b\ \ c)^2\ \ 3(ab\ \ bc\ \ ca)$

$(a\ \ b\ \ c)\frac{1}{2}\ 3(a^2\ \ b^2\ \ c^2)\ \ (a\ \ b\ \ c)^2$

➢ $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$
$= (a + b + c)\,[a^2 + b^2 + c^2 - (ab + bc + ca)]$

→ If $a + b + c = 0$
then,
$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$
$= (a + b + c)\{a^2 + b^2 + c^2 - (ab + bc + ca)\}$
($a + b + c$) ⇓ 0
$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0$
$\boxed{a^3 + b^3 + c^3 = 3abc}$

→ If $a = b = c$
$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$
$= (a + b + c)\,[a^2 + b^2 + c^2 - (ab + bc + ca)]$ (second factor ⇓ 0)
then,
$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0$
$\boxed{a^3 + b^3 + c^3 = 3abc}$

➢ $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)\,[(a + b + c)^2 - 3(ab + bc + ca)]$
यदि/If $a + b + c = 0$
तब/then, $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0$
or $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

➢ $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$
$= \frac{1}{2}\left[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2\right]$

➢ यदि/If $a = b = c$
तब/then $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 0$
or $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$

➢ यदि a, b, c समान्तर श्रेणी में हो जिनका सर्वांतर d हो तब
If a, b, c are in A.P. with common difference d
$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$
$= \frac{1}{2}\left[d^2 + d^2 + (2d)^2\right] \Rightarrow 3d^2$

उच्च घात पर आधारित सूत्र
(Formula based on higher power)

■ **यदि/If** $x + \frac{1}{x} = k$

तब/then,

➢ $x^2 + \frac{1}{x^2} = k^2 - 2$

➢ $x^3 + \frac{1}{x^3} = k^3 - 3k$

➢ $x^4 + \frac{1}{x^4} = \left(k^2 - 2\right)^2 - 2$

➢ $x^5 + \frac{1}{x^5} = \left(k^2 - 2\right)\left(k^2 - 3\right) - k$

➢ $x^6 + \frac{1}{x^6} = \left(k^3 - 3k\right)^2 - 2$

or

$= (k^2 - 2)^3 - 3(k^2 - 2)$

➢ $x^7 + \frac{1}{x^7} = \left\{(k^2 - 2)^2 - 2\right\}(k^3 - 3k) - k$

■ **यदि/If** $x - \frac{1}{x} = k$

तब/then,

➢ $x^2 + \frac{1}{x^2} = k^2 + 2$

➢ $x^3 - \frac{1}{x^3} = k^3 + 3k$

➢ $x^4 - \frac{1}{x^4} = (k^2 + 2)^2 - 2$

➢ $x^5 - \frac{1}{x^5} = (k^2 + 2)(k^3 + 3k) - k$

➢ $x^6 + \frac{1}{x^6} = (k^3 + 3k)^2 + 2$

or

$= \left(k^2 + 2\right)^3 - 3\left(k^2 + 2\right)$

➢ $x^7 - \frac{1}{x^7} = \left\{(k^2 + 2)^2 - 2\right\}(k^3 + 3k) + k$

■ **यदि/If** $x + \frac{1}{x} = \sqrt{k}$

तब/then,

➢ $x^3 + \frac{1}{x^3} = (k - 3)\sqrt{k}$

■ **यदि/If** $x - \frac{1}{x} = \sqrt{k}$

तब/then,

➢ $x^3 - \frac{1}{x^3} = (k + 3)\sqrt{k}$

TEAM SDV

■ **यदि/If** $x-\frac{1}{x}=\pm\sqrt{3}$

तब/then,

➢ $x^3+\frac{1}{x^3}=0$

or $x^6+1=0$

or $x^6+x^0=0$

✍ **यदि पदों की घातों का अंतर 6 का हो तो पदों का योग शून्य होगा।**

If the difference of power of the terms is 6 then the sum of the term will be zero.

Ex.: $x^{12}+x^6=0$ $\quad x^{94}+x^{100}=0$

■ **यदि/If** $x+\frac{1}{x}=\pm\sqrt{2}$

तब/then,

➢ $x^2+\frac{1}{x^2}=0$

or $x^4+1=0$

or $x^4+x^0=0$

✍ **यदि दो पदो की घातों में 4 का अन्तर है तो दोनों पदो का योग शून्य होगा।**

If the difference of power of the terms is 4 then the sum of the term will be zero.

Ex.: $x^{12}+x^{16}=0$ $\quad x^{96}+x^{100}=0$

■ **यदि/If** $x+\frac{1}{x}=1$

तब/then,

➢ $x^3=-1$

or $x^3+1=0$

or $x^3+x^0=1$

✍ **यदि दो पदो की घातों में 3 का अन्तर है तो दोनों पदो का योग शून्य होगा।**

If the difference of power of the terms is 3 then the sum of the term will be zero.

■ **यदि/If** $x+\frac{1}{x}=-1$

तब/then,

➢ $x^3=1$

or $x^3-1=0$

or $x^3-x^0=0$

✍ **यदि दो पदो की घातों में 3 का अन्तर है। तो दोनों पदो का अंतर शून्य होगा**

If the difference of power of the terms is 3 then the difference of the term will be zero.

■ **यदि/If** $x^2+\frac{1}{x^2}=1$

तब/then,

➢ $x^6=-1$

or $x^6+1=0$

or $x^6+x^0=0$

✍ **यदि दो पदो की घातों में 6 का अन्तर है। तो दोनों पदो का योग शून्य होगा**

If the difference of power of the terms is 6 then the difference of the term will be zero.

■ **यदि/If** $x^2+\frac{1}{x^2}=-1$

तब/then,

➢ $x^6=1$

or $x^6-1=0$

or $x^6-x^0=0$

✍ **यदि दो पदो की घातों में 6 का अन्तर है। तो दोनों पदो का अंतर शून्य होगा**

If the difference of power of the terms is 6 then the difference of the term will be zero.

■

➢ $ax+\frac{b}{x}=k \quad a^2x^2 \quad \frac{b^2}{x^2} \quad k^2 \quad 2ab$

➢ $ax-\frac{b}{x}=k \quad a^2x^2 \quad \frac{b^2}{x^2} \quad k^2 \quad 2ab$

➢ $ax+\frac{b}{x}=k$ then $ax-\frac{b}{x}=\pm\sqrt{k^2-4ab}$

➢ $ax-\frac{b}{x}=k \quad ax \quad \frac{b}{x} \quad \sqrt{k^2 \quad 4ab}$

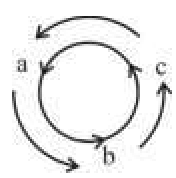
➢ $ax+\frac{b}{x}=k \quad a^3x^3 \quad \frac{b^3}{x^3} \quad k^3 \quad 3kab$

➢ $ax-\frac{b}{x}=k \quad a^3x^3 \quad \frac{b^3}{x^3} \quad k^3 \quad 3kab$

चक्रीय क्रम (Cyclic order)

■ व्यंजक के चर a, b तथा c चक्रीय क्रम में होते है यदि उनमें a के स्थान पर b, b के स्थान पर c और c के स्थान पर a रखने पर व्यंजक अपरिवर्तित रहे। इसे Σ (सिग्मा) से प्रदर्शित करते है।

The variables a, b and c in a expression are in cyclic order if the expression remains unchanged by substituting b in place of a, c in place of b and a in place of c. This is represented by Σ (sigma).



☞ $\mathbf{a(b-c)+b(c-a)+c(a-b)}$

☞ $\mathbf{\Sigma a(b-c) = a(b-c)+b(c-a)+c(a-b)}$

➢ $ab(a-b)+bc(b-c)+ca(c-a)$
$= -(a-b)(b-c)(c-a)$

➢ $(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc$
$= (a+b)(b+c)(c+a)$

➢ $(a+b+c)(ab+bc+ca)$
$= a^2b+b^2a+b^2c+bc^2+a^2c+a^2c+3abc$

➢ $(a+b+c)(ab+bc+ca)-3abc$
$= a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)$

■ **यदि/If** $a+\frac{1}{b}=1$ & $b+\frac{1}{c}=1$

तब/then,

➢ $c+\frac{1}{a}=1$

■ **यदि/If** $a+\frac{1}{b}=1$ & $b+\frac{1}{c}=1$

तब/then,

➢ $abc=-1$

■ **यदि/If** $a+\frac{1}{b}=-1$ & $b+\frac{1}{c}=-1$

तब/then,

➢ $c+\frac{1}{a}=-1$

■ **यदि/If** $a+\frac{1}{b}=-1$ & $b+\frac{1}{c}=-1$

तब/then,

➢ $abc=+1$

■ **यदि/If** $a+\frac{1}{b}=b+\frac{1}{c}=c+\frac{1}{a}$

तब/then,

➢ $a^2b^2c^2=1$

■ **यदि/If** $a+\frac{1}{b}=b+\frac{1}{c}=c+\frac{1}{a}$

तब/then,

➢ $abc=\pm1$

■ **यदि/If** $x+\frac{1}{y}=a, y+\frac{1}{z}=b, z+\frac{1}{x}=c$

तब/then,

➢ $xyz+\frac{1}{xyz}=abc-(a+b+c)$

■ **यदि/If** $x-\frac{1}{y}=a, y-\frac{1}{z}=b, z-\frac{1}{x}=c$

तब/then,

➢ $xyz-\frac{1}{xyz}=abc+(a+b+c)$

योगान्तर अनुपात
(Componendo & dividendo)

■ यदि/If $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

तब/then $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$ (componendo)

तथा/and $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$ (dividendo)

अतः/hence,

➢ यदि/If $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

तब/then,

$\mathbf{\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}}$ **या** $\mathbf{\frac{a-b}{a+b}=\frac{c-d}{c+d}}$

➢ यदि/If $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c}{d}$

तब/then,

$\mathbf{\frac{a}{b}=\frac{c+d}{c-d}}$

➢ यदि/If $\frac{a}{b}=\frac{c+d}{c-d}$

तब/then,

$\mathbf{\frac{a+b}{a-b}=\frac{c}{d}}$

■ **विशिष्ट स्थिति (Special case)-**

➢ यदि/If $x=\frac{2ab}{a+b}$

तब/then,

$\mathbf{\frac{x+2a}{x-2a}+\frac{x+2b}{x-2b}=2}$

➢ यदि/If $\frac{1}{\left(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{a}-1\right)}=A\sqrt[3]{a^2}+B\sqrt[3]{a}+C$

तब/then,

$\mathbf{A=0;\ B=\frac{1}{a+1};\ C=\frac{1}{a+1}}$

➢ यदि/If $\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{a}+1}=A\sqrt[3]{a^2}+B\sqrt[3]{a}+C$

तब/then,

$\mathbf{A=0;\ B=\frac{1}{a-1};\ C=\frac{-1}{a+1}}$

➢ $\mathbf{\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}+\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=2\ \frac{(x+y)}{(x-y)}}$

TEAM SPY

अनुपात–समानुपात (Ratio - Proportion)

➢ $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}=\frac{a-c}{b-d}=\frac{\sqrt{ac}}{\sqrt{bd}}=\frac{\sqrt{a^2+c^2}}{\sqrt{b^2+d^2}}$

➢ $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{a+c+e}{b+d+f}=\frac{a+c-e}{b+d-f}=\frac{\sqrt[3]{ace}}{\sqrt[3]{bdf}}=\frac{\sqrt{a^2+c^2+e^2}}{\sqrt{b^2+d^2+f^2}}$

■ **यदि/If** $x+y=0$

तब/then,

$x+y=0$

or $\left.\begin{matrix}x=-y\\ y=-x\end{matrix}\right\}$

$(-1)+(+1)=0$

$(+2)+(-2)=0$

$0+0=0$

✍ **x तथा y के मान शून्य, ऋणात्मक तथा धनात्मक हो सकते हैं।**

The values of x and y can be zero, negative and positive.

■ **यदि/If**

$x^2+y^2=0$

$\Downarrow \quad \Downarrow$

$0 \quad 0$

तब/then,

$x^2=0 \;\; \& \;\; y^2=0$

✍ **x^2 तथा y^2 दोनों अलग-अलग शून्य होंगे।**

The values of x^2 and y^2 will be zero separately.

Ex.: $(x-a)^2+(y-b)^2=0$

$(x-a)^2=0 \;\; \& \;\; (y-b)^2=0$

$(x-a)=0 \;\; \& \;\; y-b=0$

$x=a \;\; \& \;\; y=b$

■ **यदि/If** $x^2+y^2+z^2=0$

तब/then,

$x^2=0, y^2=0, z^2=0$

$x=0, \; y=0 \; \& \; z=0$

✍ **x^2, y^2 तथा z^2 दोनों अलग-अलग शून्य होंगे।**

The values of x^2, y^2 and z^2 will be zero separately.

Ex.: $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=0$

$(x-a)^2=0 \; (y-b)^2=0 \; (z-c)^2=0$

$x-a=0, \; (y-b)=0 \; \& \; (z-c)=0$

$x=0, \;\; y=b \;\; \& \;\; z=c$

मान रखने की विधि (Putting value method)

■ यदि $x+y=5$ तब $4(x+y)$ का मान होगा-

If $x+y=5$ then the value of $4(x+y)$ will be-

Sol. $x+y=5$

समी. की संख्या/number of equations = 1

चरों की संख्या/number of variables = 2

अतः/hence,

x और y का अलग-अलग निश्चित मान नहीं निकाल सकते परन्तु x और y के संयुक्त रूप के मान का प्रयोग कर सकते हैं।

Certain values of x and y cannot be determined separately but the combined value of x and y can be used.

तब/then,

$4(x+y)$

$4\times 5 \Rightarrow 20$

परन्तु/but,

$x+y=5$

यदि/If	x	0	1	2	3	4	5	–1	–2
तब/then	y	5	4	3	2	1	0	6	7

$\because$ $x+y=5$ में $x=0$ तब $y=5$ होगा।

$\therefore$ $4(x+y)$

$4(0+5)\Rightarrow 20$

☞ **जितने समीकरण होगे, उतने चर निश्चित होंगे, शेष को कुछ भी माना जा सकता है।**

The number of equations in the question will be fixed, the number of variable will be fixed and the rest can be considered as anything.

Ex. $x+y=5$

समी. की संख्या/number of equations = 1

चरों की संख्या/number of variables = 2

अतः/hence,

एक चर को कुछ भी मान सकते हैं।

One variable can be considered anything (–1, – 2, 0, 1, 2.....)

Ex. $x+y+z=15$

समी. की संख्या/number of equations = 1

चरों की संख्या/number of variables = 3

अतः/hence,

दो चरों को कुछ भी मान सकते हैं।

Two variables can be considered anything (–1, – 2, 0, 1, 2.....)

Ex. $a+b+c=178$ & $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=200$

समी. की संख्या/number of equations = 2

चरों की संख्या/number of variables = 3

अतः/hence,

एक चर को कुछ भी मान सकते हैं।

One variable can be considered anything (–1, – 2, 0, 1, 2.....)

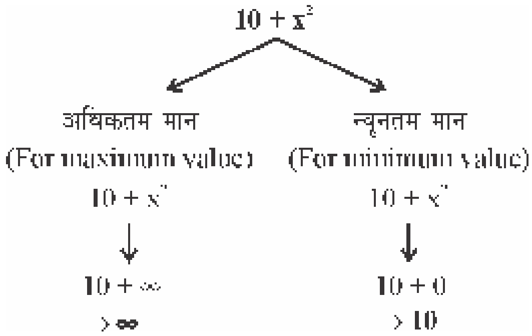
- कोई एक चर (जो ज्यादा बार या हर पद में आया हो) को शून्य कर देते हैं।
  Any one variable (which appears more often or in every term) is reduced to zero.
- यदि इससे भी प्रश्न सरल न हो तो दूसरे चर को भी शून्य कर देते हैं।
  If this doesn't make the question simpler, then the other variables are also make zero.
- कोई ऐसा समीकरण जो x, y तथा z या a, b तथा c के चर के रूप में हो तब जो चर सबसे अधिक बार आए हो उसे –1, –2, 0, 1, 2, 3 .... आदि मानकर प्रश्न को सरल बनाकर हल करते हैं।
  Any equation which has z, y and z or a, b and c as variables, then the question can be simplified by considering the variables that appear most frequently as –1, –2, 0, 1, 2, 3 .... etc. let's solve the question.
- किसी भी चर को शून्य करने के दौरान कोई भी पद अनन्त नहीं होना चाहिए।
  No term should be infinite when reducing any variable to zero.

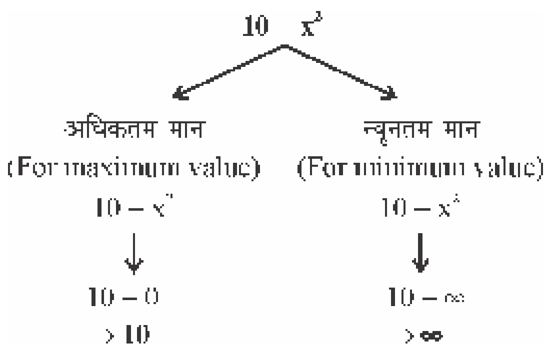
Ex. $\frac{P}{q}$ जहाँ/where, $q \neq 0$

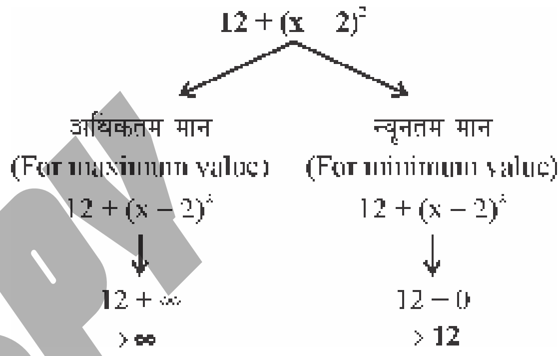
बीजगणतीय फलनों का अधिकतम एवं न्यूनतम मान
Maximum & minimum value of Algebraic function

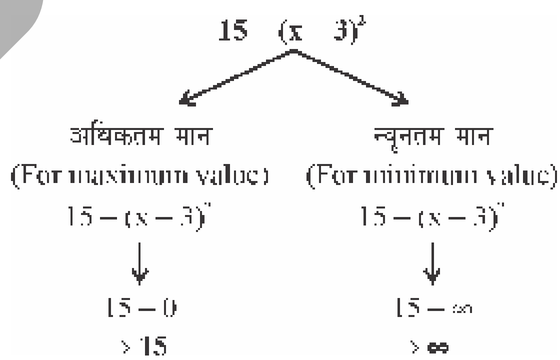
फलन	अधिकतम मान	न्यूनतम मान
x	∞	$-\infty$
x^2	∞	0
$-x$	∞	$-\infty$
$-x^2$	0	$-\infty$

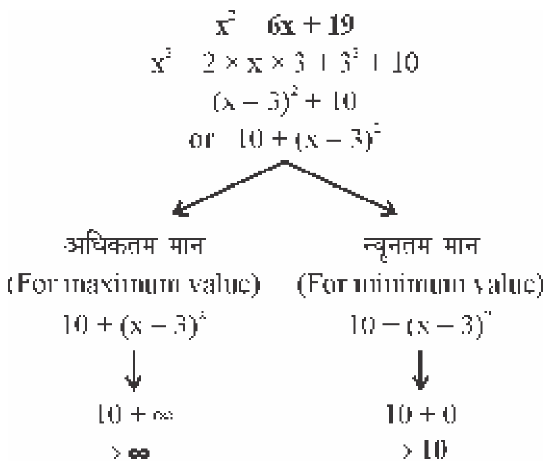
■ **अधिकतम और न्यूनतम मान निकालना (Finding maximum and minimum values)-**

➢ 

➢ 

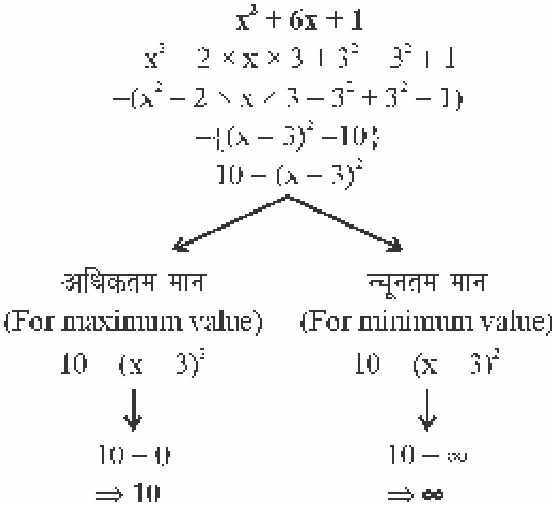
➢ 

➢ 

➢ 

TEAM SPY

➢



■ **अवकलन विधि से उच्चतम और निम्नतम मान निकालना (Finding maximum and minimum value by differential method)-**

➢ $y = f(x)$ का $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात करना।
Finding dy/dx of $y = f(x)$

➢ $\frac{dy}{dx} = 0$ रखकर प्राप्त समीकरण से x के भिन्न-भिन्न मान ज्ञात करना।
Finding different value of x from the equation obtained by putting dy/dx = 0

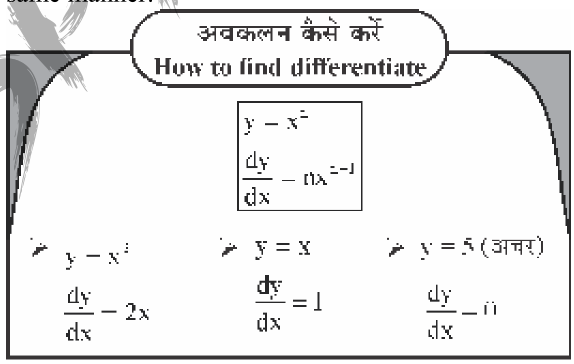
➢ मान लो कि x के भिन्न-भिन्न मान a_1, a_2, a_3 हैं।
Suppose x has different values a_1, a_2, a_3

➢ $\frac{d^2y}{dx^2}$ ज्ञात करके a_1, a_2, a_3 आदि पर $\frac{d^2y}{dx^2}$ का मान ज्ञात करना।
Finding $\frac{d^2y}{dx^2}$, find the value of $\frac{d^2y}{dx^2}$ at a_1, a_2, a_3 etc.

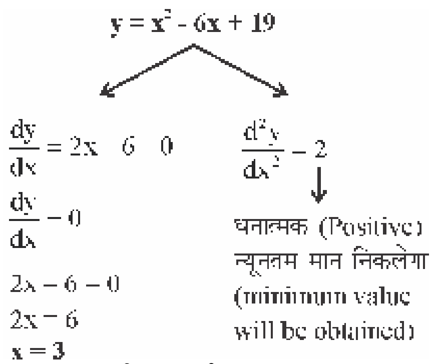
➢ यदि x के किसी मान को लिए $\frac{d^2y}{dx^2}$ का मान धनात्मक है तो फलन x के उस मान के लिए निम्निष्ठ होगा तथा यदि ऋणात्मक हो तो उच्चिष्ठ होगा।
If the value of $\frac{d^2y}{dx^2}$ is positive for any value of x, then the function will have minima for that value of x and if it is negative, it will have maxima.

➢ यदि x के किसी मान के लिए $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ हो तो x के उस मान के लिए $\frac{d^3y}{dx^3}$ ज्ञात करना। यदि x के उस मान के लिए $\frac{d^3y}{dx^3} \neq 0$ तो फलन का मान x के उस मान पर न तो उच्चिष्ठ और न निम्निष्ठ होगा।
If $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ for any value of x, then find $\frac{d^3y}{dx^3}$ for that value of x. If $\frac{d^3y}{dx^3} \neq 0$ for any value of x, then the value of the function will be neither maxima nor minima at that value of x.

➢ यदि किसी x के मान के लिए $\frac{d^3y}{dx^3} = 0$ तो उस x के मान के लिए $\frac{d^4y}{dx^4}$ ज्ञात कीजिए यदि x के उस मान के लिए $\frac{d^4y}{dx^4}$ ऋणात्मक है तो x के उस मान पर फलन उच्चिष्ठ है और यदि धनात्मक है तो निम्निष्ठ होगा। यदि यह भी शून्य है तो इसी प्रकार आगे क्रिया करते जाना है।
If $\frac{d^3y}{dx^3} = 0$ for any value of x, then find $\frac{d^4y}{dx^4}$ for that value of x. If $\frac{d^4y}{dx^4}$ is negative for that value of x, that value of x and if it is positive, then it will be minima. If it is also zero, then proceed further in the same manner.



Ex.
➢



x = 3 पर समी. $y = x^2 - 6x + 19$ का मान न्यूनतम होगा।
at x = 3, the value of equation $y = x^2 - 6x + 19$ will be minimum.
अतः/hence,
$y = x^2 - 6x + 19$
न्यूनतम मान (Minimum value),
$y_{(3)} = (3)^2 - 6 \times 3 + 19$
$= 9 - 18 + 19$
$= 9 + 1 \Rightarrow 10$

➢

$y = -3x^2 + 6x + 11$

$\frac{dy}{dx} = -6x + 6$ | $\frac{d^2y}{dx^2} = -6$

$\frac{dy}{dx} = 0$

$-6x + 6 = 0$

$-6x = -6$

$x = 1$

ऋणात्मक (Negative) अधिकतम मान निकलेगा (maximum value will be obtained)

x = 1 पर समी. $y = -3x^2 + 6x + 11$ का मान अधिकतम होगा।

at x = 1, the value of equation $y = -3x^2 + 6x + 11$ will be maximum.

अतः/hence,

$y = -3x^2 + 6x + 11$

अधिकतम मान (maximum value),

$y_{(1)} = -3(1)^2 + 6 \times 1 + 11$

$= -3 + 6 + 11$

$= 14$

द्विघात समीकरण (Quadratic equation)

■ $ax^2 + bx + c = 0$

$a \neq 0$

जहाँ a, b तथा c परिमेय संख्या है

(where, a, b and c are rational numbers)

☞ $ax^2 + bx + c = 0$

$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$

$(A)^2 \quad 2.A.B \quad (B)^2$ बनाने के लिए/to make

$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0$

$\left\{\because 2B = \frac{b}{a} \quad B = \frac{b}{2a}\right\}$

$\Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} = 0$

$\Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} = 0$

$\Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$

$\Rightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$\Rightarrow x = \frac{-b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

यदि मूल α, β हों/If roots are α, β-

तब/then

$\alpha = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$\beta = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

विविक्तकर/Discriminant (D)

$D = b^2 - 4ac$

- **$b^2 - 4ac = 0$**: मूल α और β वास्तविक एव समान होंगे। (Roots α and β will be real and equal)
- **$b^2 - 4ac > 0$**: मूल α और β वास्तविक एवं असमान होंगे। (Roots α and β will be real and unequal)
  - **परिमेय (Rational)**: $b^2 - 4ac$ > पूर्ण वर्ग (Perfect square)
  - **अपरिमेय (Irrational)**: $b^2 - 4ac$ > पूर्ण वर्ग नहीं है (non perfect square)
    - यदि एक मूल (If first root) $a + \sqrt{b}$
    - तब दूसरा मूल (Then second root) $a - \sqrt{b}$
- **$b^2 - 4ac < 0$**: मूल α और β काल्पनिक होंगे। (Roots α and β will be imaginary)

■ **यदि समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के मूल α और β हो**

If roots of equation $ax^2 + bx + c = 0$ are α and β

तब/then,

➢ **मूलो का योग (Sum of roots):-**

$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$

➢ **मूलो का गुणनफल (Multiplication of roots):–**

$\alpha.\beta = \frac{c}{a}$

TEAM SPY

■ **यदि मूल α और β दिये गये हो तब समीकरण बनाना**

If roots α and β are given, then making the equation

तब/then,

x^2 – (मूलो का योग)x + मूलो का गुणनफल = 0

x^2 – (sum of roots) x + multiplication of roots = 0

$\mathbf{x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha.\beta = 0}$

त्रिघात समीकरण (Cubic equation)

■ **यदि समीकरण $ax^3+bx^2+cx+d=0$ के मूल α, β और γ हो**

If roots of equation $ax^3+bx^2+cx+d=0$ are α, β and γ

तब/then,

➢ $\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a}$

➢ $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a}$

➢ $\alpha.\beta.\gamma=-\frac{d}{a}$

■ **यदि मूल α, β और γ दिये गये हो तब समीकरण बनाना**

If roots α, β and γ are given, then making the equation

तब/then,

➢ $x^3-(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x-\alpha\beta\gamma=0$

चतुर्थघात समीकरण (Biquadratic equation)

■ **यदि समीकरण $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$ के मूल α, β, γ और δ हो**

If roots of equation $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$ are α, β, γ and δ

तब/then,

➢ $\alpha+\beta+\gamma+\delta=-\frac{b}{a}$

➢ $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\delta+\delta\alpha=\frac{c}{a}$

➢ $\alpha\beta\gamma+\beta\gamma\delta+\gamma\delta\alpha+\delta\alpha\beta=-\frac{d}{a}$

➢ $\alpha.\beta.\gamma.\delta=\frac{e}{a}$

■ **यदि मूल α, β, γ और δ दिये गये हो तब समीकरण बनाना**

If roots α, β, γ and δ are given, then making the equation

तब/then,

➢

$x^4-(\alpha+\beta+\gamma+\delta)x^3+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\delta+\delta\alpha)x^2-(\alpha\beta\gamma+\beta\gamma\delta+\gamma\delta\alpha+\delta\alpha\beta)x+\alpha\beta\gamma\delta=0$

शेषफल प्रमेय (Remainder theorem)

■ एक या एक से अधिक घात वाले बहुपद P(x) में रेखिक बहुपद (x–a) से भाग देने पर शेषफल P(a) होता है

If a polynomial P(x) is divided by a linear factor (x – a), the remainder is equal to P(a).

Ex. $P(x)=x^3+2x^2-x+1$ में (x–2) से भाग देने पर,

$P(x)=x^3+2x^2-x+1$ is divided by (x–2)

∵ भाजक (divisor),

$x-2=0 \Rightarrow x=2$

∴ शेषफल/ Remainder, $P(2)=2^3+2(2)^2-2+1$

$= 8+2\times4-2+1$

$= 8+8-2+1$

$= 15$

गुणनफल प्रमेय (Factor theorem)

■ एक या एक से अधिक घात वाले बहुपद P(x) में रेखिक बहुपद (x–a) से भाग देने पर भी शेषफल P(a) होता है

If a polynomial P(x) is divided by a linear factor (x – a), the remainder is equal to P(a).

यदि/If P(a) = 0,

तब (x – a), P(x) का एक गुणनखण्ड होगा

then, (x – a) is a factor of P(x).

Ex. $P(x)= x^3+2x^2-x+1$ में $(x-2)$ से भाग देने पर,

$P(x)= x^3+2x^2-x+1$ is divided by $(x-2)$

$\because$ भाजक (divisor),

$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$

$P(x) = x^3+2x^2-x-14$

$\therefore P(2) = 2^3+2(2)^2-2-14$

$= 8+8-16$

$= 16-16$

$= 0$

अतः $(x-2)$, बहुपद x^3+2x^2-x-14 का गुणनखण्ड होगा।

Hence, $(x-2)$ is a factor of polynomial x^3+2x^2-x-14

असमिका (Inequality)

- असमिका दो मूल्यों या अभिव्यक्तियों के बीच तुलना है जो समान नहीं है। असमिकाओं का उपयोग उन मानों की श्रेणी को खोजने के लिए किया जाता है जो किसी चर की शर्तों को पूरा करते हैं।

  An inequality is a comparison between two values or expressions that are not equal. Inequalities are used to find the range of values that satisfy a variable's conditions.

➢ **असमिका के प्रतीक/Inequality symbols**

☞ $<$ → से कम/Less than

☞ $>$ → से अधिक/Greater than

☞ $\le$ → से कम या बराबर/Less than or equal to

☞ $\ge$ → से अधिक या बराबर/Greater than or equal to

☞ $\ne$ → बराबर नहीं/Not equal to

Ex.:

☞ $x < 6 \rightarrow x$ का मान 6 से कम है

The value of x is less than 6

☞ $x > 6 \rightarrow x$ का मान 6 से अधिक है

The value of x is greater than 6

☞ $x \le 6 \rightarrow x$ का मान 6 से कम या बराबर है

The value of x is less than or equal to 6

☞ $x \ge 6 \rightarrow x$ का मान 6 से अधिक या बराबर है

The value of x is greater than or equal to 6

☞ $x \ne 6 \rightarrow x$ का मान 6 के बराबर नहीं है

The value of x is not equal to 6

असमिका के सामान्य गुणधर्म
Basic properties of Inequality

1. एक असमिका, दो वास्तविक संख्याओं या दो बीजीय व्यंजक में $<, >, \le$ या $\ge$ चिह्नों द्वारा बनती है।/An equality is formed by adding $<, >, \le$ or $\ge$ signs to two real numbers or two algebraic expressions.
2. किसी असमिका के दोनों पक्षों में समान संख्या जोड़ने अथवा घटाने पर असमिका का चिह्न अपरिवर्तित रहता है।/When the same number is added or subtracted to both side of an inequality, the sign of the inequality remains unchanged.
3. किसी असमिका के दोनों पक्षों को किसी धनात्मक संख्या से गुणा अथवा भाग करने पर असमिका का चिह्न अपरिवर्तित रहता है।

   When both sides of an inequality are multiplied or divided by a positive number, the sign of the inequality remains unchanged.
4. किसी असमिका के दोनों पक्षों को किसी ऋणात्मक संख्या से गुणा अथवा भाग करने पर असमिका का चिह्न बदल जाता है।

   When both sides of an inequality are multiplied or divided by a negative number, the sign of the inequality changes.
5. किसी असमिका में कोई पद एक पक्ष से दूसरे पक्ष में ले जाने पर पद का चिह्न बदल जाता है।

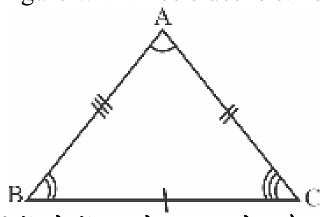
   In an inequality, when a term is moved from one side to the other, the sign of the term changes.
6. x के उन मानो को जो दिये गये असमिका को एक सत्य कथन बनाते है, उन्हें असमिका के हल कहते है।

   Those values of x which make the given inequality a true statement are called solutions of the inequality.

TEAM SPY

22 त्रिकोणमिति (Trigonometry)

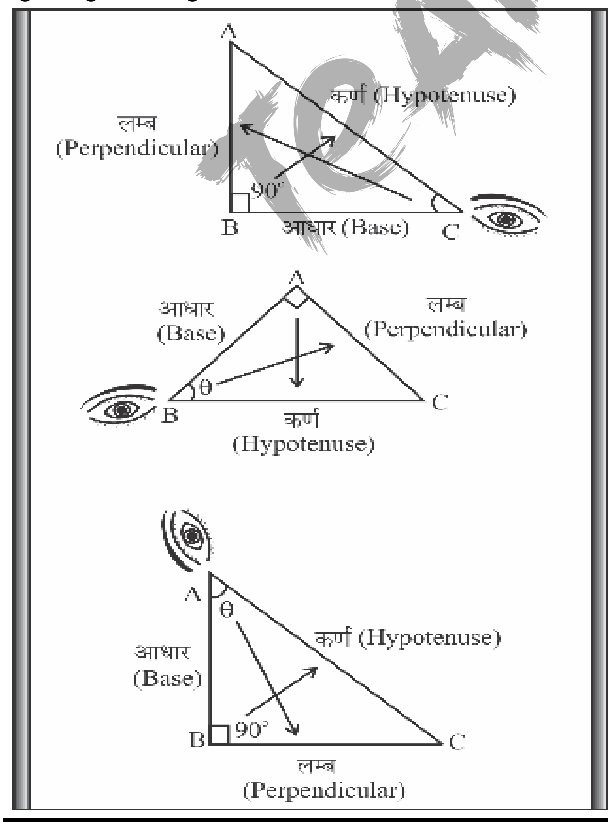
- त्रिकोणमिति के अन्तर्गत त्रिभुज की भुजाओं और कोणों का मापन किया जाता है।
  In trigonometry, the sides and angles of a triangle are measured.
  त्रिभुज (Triangle) : तीन भुजाओं से बन्द आकृति त्रिभुज कहलाता है।
  A closed figure with three sides is called a triangle.



➢ त्रिभुज के तीनों कोणों का योग 180^o होता है।
The sum of all three angles of a triangle is 180^o.

समकोण त्रिभुज (Right angled triangle)

ऐसा त्रिभुज जिसका एक कोण 90° का होता है, समकोण त्रिभुज कहलाता है। A triangle which one angle is 90° is called right angled triangle.



➢ 90° के सामने (Opposite of 90°) ⟹ कर्ण (Hypotenuse)

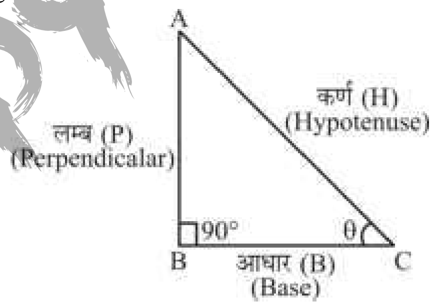
➢ θ° के सामने (Opposite of θ°) ⟹ लम्ब (Perpendicular)

➢ शेष भुजा (Remaining side) ⟹ आधार (Base)

पाइथागोरस प्रमेय (Pythagoras' theorem) :–

समकोण त्रिभुज में, कर्ण का वर्ग शेष दो भुजाओं के वर्गो के योग के बराबर होता है।

In right-angled triangle, the square of the length of hypotenuse is equal to the sum of squares of the lengths of other two sides.



$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$$H^2 = P^2 + B^2$$

पाइथागोरस त्रिक (Pythagoras Triplets) :–

तीन संख्याओं का ऐसा समूह जो पाइथागोरस प्रमेय पर लागू होता है।

A set of three numbers that applies to the pythagoras theorem.

(3, 4, 5)	(5, 12, 13)	(7, 24, 25)
(8, 15, 17)	(9, 40, 41)	(11, 60, 61)
(15, 20, 25)	(7, 24, 25)	(20, 21, 29)

$$\{(a^2-b^2),(2ab),(a^2+b^2)\}$$

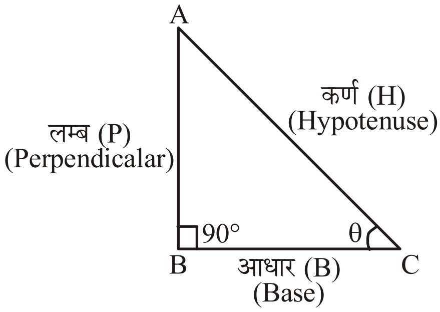
$$\{(1-x^2),(2x),(1+x^2)\}$$

$$\{(a-b),(2\sqrt{ab}),(a+b)\}$$

➢ यदि (a, b, c) पाइथागोरस ट्रिपलेट है तो (ak, bk, ck) तथा $\left(\frac{a}{k},\frac{b}{k},\frac{c}{k}\right)$ पाइथागोरस ट्रिपलेट होंगे।

If (a, b, c) be a Pythagoras triplets, then (ak, bk, ck) or $\left(\frac{a}{k},\frac{b}{k},\frac{c}{k}\right)$ will also be the phythagoras triplet.

त्रिकोणमितीय अनुपात (Trigonometric Ratio)



$$\sin\theta = \frac{\text{लम्ब (Perpendicular)}}{\text{कर्ण (Hypotenuse)}} = \frac{P}{H}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{आधार (Base)}}{\text{कर्ण (Hypotenuse)}} = \frac{B}{H}$$

$$\tan\theta = \frac{\text{लम्ब (Perpendicular)}}{\text{आधार (Base)}} = \frac{P}{B}$$

$$\text{cosec}\,\theta = \frac{\text{कर्ण (Hypotenuse)}}{\text{लम्ब (Perpendicular)}} = \frac{H}{P}$$

$$\sec\theta = \frac{\text{कर्ण (Hypotenuse)}}{\text{आधार (Base)}} = \frac{H}{B}$$

$$\cot\theta = \frac{\text{आधार (Base)}}{\text{लम्ब (Perpendicular)}} = \frac{B}{P}$$

व्युत्क्रम सम्बन्ध (Reciprocal Relation):–

$$\sin\theta = \frac{1}{\text{cosec}\,\theta} \Rightarrow \boxed{\sin\theta \times \text{cosec}\,\theta = 1}$$

$$\cos\theta = \frac{1}{\sec\theta} \Rightarrow \boxed{\cos\theta \times \sec\theta = 1}$$

$$\tan\theta = \frac{1}{\cot\theta} \Rightarrow \boxed{\tan\theta \times \cot\theta = 1}$$

☞ sin θ, ∠ θ के sine का संक्षिप्त रूप है, यह sin और θ का गुणनफल नहीं है।
sin θ is the short form of ∠ θ and sine. This is not the product of sine and θ.

☞ sin θ + sin 2θ को हम कभी भी sin (θ + 2θ) नहीं लिख सकते है।
We can never write (sin θ + sin 2θ) as sin (θ + 2θ).

त्रिकोणमिति फलन के मान

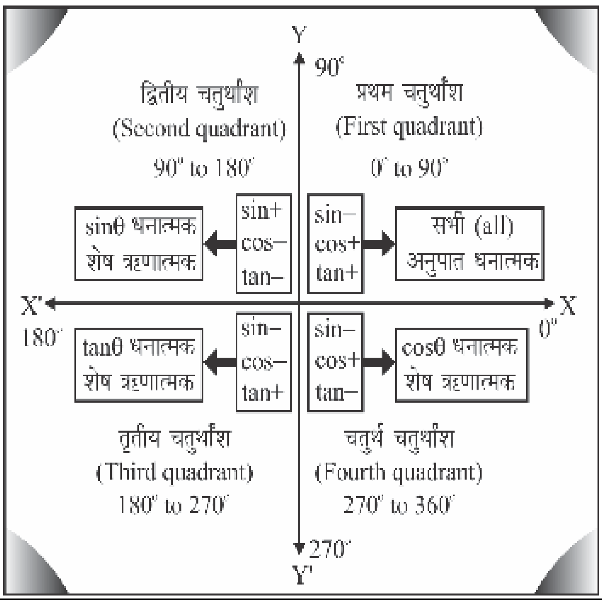
(Value of trigonometric function) :–

θ^o or θ^c	0° or 0^c	30° or $\frac{\pi^c}{6}$	45° or $\frac{\pi^c}{4}$	60° or $\frac{\pi^c}{3}$	90° or $\frac{\pi^c}{2}$
sin θ	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos θ	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
tan θ	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞
cosec θ	∞	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1
sec θ	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	∞
cot θ	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

अन्य महत्वपूर्ण मान (Other important value)	
$\sin 15^0 = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$	$\cos 15^0 = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$
$\tan 15^0 = 2-\sqrt{3}$	$\cot 15^0 = 2+\sqrt{3}$
$\sin 18^0 = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\cos 18^0 = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$
$\sin 36^0 = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$	$\cos 36^0 = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$
$\sin 22\frac{1}{2}^0 = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$	$\cos 22\frac{1}{2}^0 = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$
$\tan 22\frac{1}{2}^0 = \sqrt{2}-1$	$\cot 22\frac{1}{2}^0 = \sqrt{2}+1$

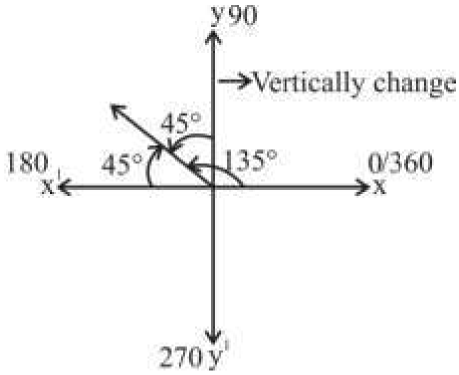
त्रिकोणमितीय अनुपातों के चिह्नों की समझ

(Understanding signs of trigonometric ratios) :–



TEAM SPY

त्रिकोणमिति अनुपातों का बदलाव (Interchange of trigonometric Ratios) :–



- **लम्बवत बदलाव (Vertically change) :** (90 ± θ) तथा (270 ± θ) के साथ अनुपात निम्न तरीके से बदल जाते हैं–
  The ratio change with (90 ± θ) and (270 ± θ) in the following manner :

  $\sin\theta \rightleftharpoons \cos\theta$
  $\tan\theta \rightleftharpoons \cot\theta$
  $\text{cosec}\,\theta \rightleftharpoons \sec\theta$

- **क्षितिज बदलाव (Horizontal change) :** (180 ± θ) तथा (360 ± θ) के साथ अनुपात में कोई बदलाव नहीं होता।
  There is no change ratio with respect to (180 ± θ) and (360 ± θ).

त्रिकोणमिति चिह्नों का प्रयोग (Use of trigonometric signs)	
$\sin(\pm\theta) = \pm\sin\theta$	$\cos(\pm\theta) = \cos\theta$
$\sin(90^0 \pm \theta) = \cos\theta$	$\cos(90^0 \pm \theta) = \mp\sin\theta$
$\sin(180^0 \pm \theta) = \mp\sin\theta$	$\cos(180^0 \pm \theta) = -\cos\theta$
$\sin(270 \pm \theta) = -\cos\theta$	$\cos(270 \pm \theta) = \pm\sin\theta$
$\sin(360^0 \pm \theta) = \pm\sin\theta$	$\cos(360^0 \pm \theta) = \cos\theta$

Ex. : tan 135 का मान निकालिए/Find the value of tan 135.

Sol. tan 135 = tan (90 + 45)

= – cot 45 ⇒ – 1

or

tan 135 = tan (180 – 45)

= – tan 45 ⇒ – 1

मूल त्रिकोणमिति सर्वसमिकाऐं (Basic trigonometric identities)

- $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ → $1 - \sin^2\theta = \cos^2\theta$; $1 - \cos^2\theta = \sin^2\theta$
- $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$ → $\sec^2\theta - 1 = \tan^2\theta$; $\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$
- $\text{cosec}^2\theta = 1 + \cot^2\theta$ → $\text{cosec}^2\theta - 1 = \cot^2\theta$; $\text{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = 1$

- If a sinθ ± b cos θ = c
  then $a\cos\theta \mp b\sin\theta = \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}$
- If $a\sin\theta + b\cos\theta = \sqrt{a^2 + b^2}$
  then $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\theta + \frac{b\cos\theta}{\sqrt{a^2+b^2}} = 1$
  On comparison $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$
  $\sin\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ & $\cos\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$
- If $\cos A + \cos^2 A = 1$
  then $\sin^2 A + \sin^4 A = 1$
- If $\sin A + \sin^2 A = 1$
  then $\cos^2 A + \cos^4 A = 1$
- If $\tan^2\theta + \tan^4\theta = 1$
  then $\cos^2\theta + \cos^4\theta = 1$
- $\sin^6\theta + \cos^6\theta = 1 - 3\sin^2\theta.\cos^2\theta$
- $\sin^4\theta + \cos^4\theta = 1 - 2\sin^2\theta.\cos^2\theta$
- ∵ $\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$
  $(\sec\theta - \tan\theta)(\sec\theta + \tan\theta) = 1$
  If sec θ – tan θ = x ....(i)
  then $\sec\theta + \tan\theta = \frac{1}{x}$ ...(ii)
  from eq^n (i) and (ii)
  ∴ $2\sec\theta = \frac{x^2+1}{x} \Rightarrow \mathbf{sec\theta = \frac{x^2+1}{2x}}$
  & $2\tan\theta = \frac{x^2-1}{x} \Rightarrow \mathbf{tan\theta = \frac{x^2-1}{2x}}$

- $\because \text{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = 1$

  $(\text{cosec}\,\theta - \cot\theta)(\text{cosec}\,\theta + \cot\theta) = 1$

  If $\text{cosec}\,\theta + \cot\theta = x$ … (i)

  then $\text{cosec}\,\theta - \cot\theta = \frac{1}{x}$ … (ii)

  from eq^n (i) and (ii)

  $2\text{cosec}\theta = \frac{x^2+1}{x} \Rightarrow \mathbf{cosec\theta = \frac{x^2+1}{2x}}$

  $2\cot\theta = \frac{x^2-1}{x} \Rightarrow \mathbf{\cot\theta = \frac{x^2-1}{2x}}$

- If $p\sec\theta + q\tan\theta = r$ & $q\sec\theta + p\tan\theta = s$

  then $\boxed{p^2 - q^2 = r^2 - s^2}$

- If $p\,\text{cosec}\,\theta + q\cot\theta = r$ & $q\,\text{cosec}\,\theta + p\cot\theta = s$

  then $\boxed{p^2 - q^2 = r^2 - s^2}$

$\sin 1^o.\ \sin 2^o.\ \sin 3^o$ ………… $\sin 180^o = 0$
$\cos 1^o.\ \cos 2^o.\ \cos 3^o$ ………… $\cos 90^o = 0$
$\tan 1^o.$
$\tan 2^o.\ \tan 3^o$ ………… $\tan 89^o = 1$

रूप परिवर्तन (Transformation):–

	sin θ	cos θ	tan θ	cot θ	sec θ	cosec θ
sin θ	sin θ	$\sqrt{1-\cos^2\theta}$	$\frac{\tan\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}$	$\frac{1}{\sqrt{1+\cot^2\theta}}$	$\frac{\sqrt{\sec^2\theta-1}}{\sec\theta}$	$\frac{1}{\text{cosec}\theta}$
cos θ	$\sqrt{1-\sin^2\theta}$	cos θ	$\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}$	$\frac{\cot\theta}{\sqrt{1+\cot^2\theta}}$	$\frac{1}{\sec\theta}$	$\frac{\sqrt{\text{cosec}^2\theta-1}}{\text{cosec}\theta}$
tan θ	$\frac{\sin\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}$	$\frac{\sqrt{1-\cos^2\theta}}{\cos\theta}$	tanθ	$\frac{1}{\cot\theta}$	$\sqrt{\sec^2\theta-1}$	$\frac{1}{\sqrt{\cos ec^2\theta-1}}$
cot θ	$\frac{\sqrt{1-\sin^2\theta}}{\sin\theta}$	$\frac{\cos\theta}{\sqrt{1-\cos^2\theta}}$	$\frac{1}{\tan\theta}$	cot θ	$\frac{1}{\sqrt{\sec^2\theta-1}}$	$\text{cosec}^2\,\theta - 1$
sec θ	$\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}$	$\frac{1}{\cos\theta}$	$\sqrt{1+\tan^2\theta}$	$\frac{\sqrt{1+\cot^2\theta}}{\cot\theta}$	sec θ	$\frac{\text{cosec}^2\theta}{\sqrt{\text{cosec}^2-1}}$
cosec θ	$\frac{1}{\sin\theta}$	$\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2\theta}}$	$\frac{\sqrt{1+\tan^2\theta}}{\tan\theta}$	$\sqrt{1+\cot^2\theta}$	$\frac{\sec\theta}{\sqrt{\sec^2\theta-1}}$	cosec θ

$\boxed{\frac{\sin\theta-\cos\theta+1}{\sin\theta+\cos\theta-1}}$ के विभिन्न रूप (Different forms)

अंश तथा हर में cos θ से भाग देने पर (Divide by cos θ in numerator & denominator)

- $\frac{\tan\theta-1+\sec\theta}{\tan\theta+1-\sec\theta}$
- $\boxed{\sec\theta+\tan\theta}$
- $\boxed{\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}}$

अंश तथा हर में sin θ से भाग देने पर (Divide by sin θ in numerator & denominator)

- $\frac{1-\cot\theta+\text{cosec}\theta}{1+\cot\theta-\text{cosec}\theta}$
- $\boxed{\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}}$
- $\boxed{\sqrt{\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}}}$

$\boxed{\frac{\cos\theta-\sin\theta+1}{\cos\theta+\sin\theta-1}}$ के विभिन्न रूप (Different forms)

अंश तथा हर में cos θ से भाग देने पर (Divide by cos θ in numerator & denominator)

- $\frac{1-\tan\theta+\sec\theta}{1+\tan\theta-\sec\theta}$
- $\boxed{\text{cosec}\,\theta+\cot\theta}$
- $\boxed{\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}}$

अंश तथा हर में sin θ से भाग देने पर (Divide by sin θ in numerator & denominator)

- $\frac{\cot\theta-1+\text{cosec}\theta}{\cot\theta+1-\text{cosec}\theta}$
- $\boxed{\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}}$
- $\boxed{\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}}}$

TEAM SPY

- $\boxed{\cot\frac{\theta}{2}}$

$$\boxed{\frac{\cos\theta-\sin\theta+1}{\cos\theta+\sin\theta+1}}$$

के विभिन्न रूप (Different forms)

अंश तथा हर में cos θ से भाग देने पर (Divide by cos θ in numerator & denominator)

- $\dfrac{1-\tan\theta+\sec\theta}{1+\tan\theta+\sec\theta}$

अंश तथा हर में sin θ से भाग देने पर (Divide by sin θ in numerator & denominator)

- $\dfrac{\cot\theta-1+\text{cosec}\,\theta}{\cot\theta+1+\text{cosec}\,\theta}$

- $\boxed{\sec\theta-\tan\theta}$
- $\boxed{\dfrac{1-\sin\theta}{\cos\theta}}$
- $\boxed{\dfrac{\cos\theta}{1+\sin\theta}}$
- $\boxed{\sqrt{\dfrac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}}}$

$$\boxed{\frac{\sin\theta-\cos\theta+1}{\sin\theta+\cos\theta-1}}$$

के विभिन्न रूप (Different forms)

अंश तथा हर में cos θ से भाग देने पर (Divide by cos θ in numerator & denominator)

- $\dfrac{1-\cot\theta+\text{cosec}\,\theta}{1+\cot\theta+\text{cosec}\,\theta}$

अंश तथा हर में sin θ से भाग देने पर (Divide by sin θ in numerator & denominator)

- $\dfrac{\tan\theta-1+\sec\theta}{\tan\theta+1+\sec\theta}$

- $\boxed{\text{cosec}\theta-\cot\theta}$
- $\boxed{\dfrac{1-\cos\theta}{\sin\theta}}$
- $\boxed{\dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta}}$
- $\boxed{\sqrt{\dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}}$
- $\boxed{\tan\dfrac{\theta}{2}}$

Higher identities of trigonometric ratio

1.

- sin(A+B) = sinAcosB+cosAsinB
- sin (A–B)= sinAcosB –cosAsinB
- cos(A+B)= cosAcosB–sinAsinB
- cos(A–B)= cosAcosB+sinAsinB
- $\tan(A+B)=\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B};\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+\theta\right)=\dfrac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}$
- $\tan(A-B)=\dfrac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\tan B};\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-\theta\right)=\dfrac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}$
- $\cot(A+B)=\dfrac{\cot A\cot B-1}{\cot A+\cot B}$
- $\cot(A-B)=\dfrac{\cot A\cot B+1}{\cot B-\cot A}$
- $\tan(A+B+C)=\dfrac{\tan A+\tan B+\tan C-\tan A\tan B\tan C}{1-\tan A\tan B-\tan B\tan C-\tan C\tan A}$

2.

- sin(A+B) sin(A–B)
  $=\sin^2A-\sin^2B=\cos^2B-\cos^2A$
- cos(A+B) cos(A–B)
  $=\cos^2A-\sin^2B=\cos^2B-\sin^2A$

3.

- $\sin C+\sin D=2\sin\dfrac{C+D}{2}\cos\dfrac{C-D}{2}$
- $\sin C-\sin D=2\cos\dfrac{C+D}{2}\sin\dfrac{C-D}{2}$
- $\cos C+\cos D=2\cos\dfrac{C+D}{2}\cos\dfrac{C-D}{2}$
- $\cos C-\cos D=2\sin\dfrac{C+D}{2}\sin\dfrac{D-C}{2}$

4.

- 2sinAcosB= sin(A+B)+sin(A–B)
- 2cosAsinB= sin(A+B)–sin(A–B)
- 2cosAcosB= cos(A+B)+cos(A–B)
- 2sinAsinB= cos(A–B)–cos(A+B)

5.

- $\sin 2A=2\sin A\cos A=\dfrac{2\tan A}{1+\tan^2 A}$
- $\cos 2A=\cos^2 A-\sin^2 A=1-2\sin^2 A$
  $=2\cos^2 A-1=\dfrac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$
- $\tan 2A=\dfrac{2\tan A}{1-\tan^2 A},\cot 2A=\dfrac{\cot^2 A-1}{2\cot A}$

TeAM SPY

6.

- $\sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A$
- $\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A$
- $\tan 3A = \frac{3\tan A - \tan^3 A}{1 - 3\tan^2 A}$
- $\cot 3A = \frac{\cot^3 A - 3\cot A}{3\cot^2 A - 1}$

7.

- $\sin A = 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2} = \frac{2\tan\frac{A}{2}}{1+\tan^2\frac{A}{2}}$
- $\cos A = \cos^2\frac{A}{2} - \sin^2\frac{A}{2} = 1 - 2\sin^2\frac{A}{2}$

$$= 2\cos^2\frac{A}{2} - 1 = \frac{1-\tan^2\frac{A}{2}}{1+\tan^2\frac{A}{2}}$$

- $\tan A = \frac{2\tan\frac{A}{2}}{1-\tan^2\frac{A}{2}}$
- $\cot A = \frac{\cot^2\frac{A}{2} - 1}{2\cot\frac{A}{2}}$

8.

- $\sin A = 3\sin\frac{A}{3} - 4\sin^3\frac{A}{3}$
- $\cos A = 4\cos^3\frac{A}{3} - 3\cos\frac{A}{3}$

9.

- $\sin\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}$
- $\cos\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}$

10. किसी भी त्रिभुज के अन्तः कोणों का योग $A+B+C = 180^0$, तो

- $\sin A = \sin(B+C)$; $\cos A = -\cos(B+C)$
- $\sin\frac{A}{2} = \cos\frac{(B+C)}{2}; \cos\frac{A}{2} = \sin\frac{(B+C)}{2}$
- $\sin\theta.\sin(60-\theta).\sin(60+\theta) = \frac{1}{4}\sin 3\theta$
- $\cos\theta.\cos(60-\theta).\cos(60+\theta) = \frac{1}{4}\cos 3\theta$
- $\tan\theta.\tan(60-\theta).\tan(60+\theta) = \tan 3\theta$
- $\cot\theta.\cot(60-\theta).\cot(60+\theta) = \cot 3\theta$
- If A + B + C = 180, then

  $\boxed{\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C}$

  or

  $\boxed{\cot A \cot B + \cot B \cot C + \cot C \cot A = 1}$
- If A + B + C = 90, then

  $\boxed{\tan A \tan B + \tan B \tan C + \tan C \tan A = 1}$

  or

  $\boxed{\cot A + \cot B + \cot C = \cot A.\cot B.\cot C}$
- If A + B = 45° or 225, then

  $\boxed{(1+\tan A)(1+\tan B) = 2}$

  or $\boxed{(1-\cot A)(1-\cot B) = 2}$

  or $\boxed{(\cot A - 1)(\cot B - 1) = 2}$
- A – B = 45 or 225, then

  $\boxed{(1+\tan A)(1-\tan B) = 2}$

  or $\boxed{(1-\cot A)(1+\cot B) = 2}$
- In Δ ABC,

  $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \sin B \sin C$

  $\sin 2A + \sin 2B - \sin 2C = 4 \cos A \cos B \sin C$

  $\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = -4\cos A \cos B \cos C - 1$

  $\cos 2A + \cos 2B - \cos 2C = 1 - 4\sin A \sin B \sin C$
- If $A + B + C = \pi$

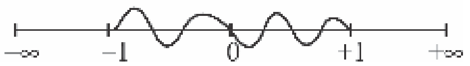
  $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2 + 2\cos A \cos B \cos C$

TEAM SPY

अधिकतम और न्यूनतम मान
(Maximum & Minimum value)

त्रिकोणमितीय अनुपातों का अधिकतम व न्यूनतम मान (Maximum and minimum value of trigonometric Ratioes)		
अनुपात (Ratio)	अधिकतम मान (Maximum value)	न्यूनतम मान (Minimum value)
$\sin\theta$ or $\cos\theta$	1	– 1
$\sin^2\theta$ or $\cos^2\theta$	1	0
$\sin^3\theta$ or $\cos^3\theta$	1	–1
$\tan\theta$ or $\cot\theta$	∞	$-\infty$
$\tan^2\theta$ or $\cot^2\theta$	∞	0
$\sec\theta$ or $\text{cosec}\,\theta$	∞	$-\infty$
$\sec^2\theta$ or $\text{cosec}^2\theta$	∞	1
$\sec^3\theta$ or $\text{cosec}^3\theta$	∞	$-\infty$

☞ **For $\sin\theta$ & $\cos\theta$:**

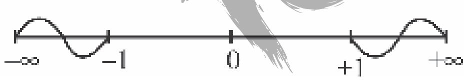


$\sin\theta$ और $\cos\theta$ का मान –1 से +1 तक होता है।

☞ **For $\tan\theta$ & $\cot\theta$:**

$\tan\theta$ और $\cot\theta$ का मान $-\infty$ से $+\infty$ तक होता है।

☞ **For $\sec\theta$ & $\text{cosec}\theta$:**



$\sec\theta$ और $\text{cosec}\theta$ का मान –1 से $-\infty$ तक तथा +1 से $+\infty$ तक होता है, जबकि –1 और +1 के बीच में नहीं होता है।

■ $\boxed{a\sin^2\alpha + b\cos^2\alpha}$

If a > b	If b > a
maximum value = a	maximum value = b
minimum value = b	minimum value = a

■ $\boxed{a\sec^2\alpha + b\tan^2\alpha}$

maximum value = ∞ minimum value = a

■ $\boxed{a\sin\theta + b\cos\theta}$

maximum value = $\sqrt{a^2+b^2}$

minimum value = $-\sqrt{a^2+b^2}$

■ $\boxed{a\tan^2\theta + b\cot^2\theta}$

maximum value = ∞ minimum value = $2\sqrt{ab}$

■ $\boxed{\alpha\sin^2\theta + b\,\text{cosec}^2\theta}$

maximum value = ∞

minimum value $\Rightarrow$

case I $\Rightarrow$ If $a \ge b$ then $2\sqrt{ab}$

case II $\Rightarrow$ If $a \le b$ then $(a + b)$

■ $\boxed{a\cos^2\theta + b\sec^2\theta}$

maximum value = ∞

minimum value $\Rightarrow$

case (I):– If $a \ge b$ then $\rightarrow$ then $2\sqrt{ab}$

If $a \le b \rightarrow (a + b)$

■ $\boxed{a\sec^2\theta + b\,\text{cosec}^2\theta}$

maximum value = ∞

minimum value = $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2$

■ $\boxed{\sin^n\theta.\cos^n\theta}$

maximum value = $\frac{1}{2^n}$

min. value = $\left[\frac{(-1)^n}{2^n}\right]$ → $-\frac{1}{2^n}$ (n → odd/विषम) ; → 0 (n → even/सम)

☞ $\sin^n 2\theta$ → min. value → 0 (n → even/सम) ; → –1 (n →विषम/odd)

■ $\boxed{\sin^{2m}\theta + \sin^{2n}\theta \le 1}$

$\because \sin^{2m}\theta$ ……… $\sin^6\theta \le \sin^4\theta \le \sin^2\theta$ ..(i)

& $\cos^{2n}\theta$ ……… $\cos^6\theta \le \cos^4\theta \le \cos^2\theta$ ..(ii)

From equation (i) and (ii)

$\sin^{2m}\theta + \sin^{2n}\theta \le \sin^2\theta + \cos^2\theta$

$\boxed{\sin^{2m}\theta + \sin^{2h}\theta \le 1}$

☞ अतः $\sin^{2m}\theta + \sin^{2n}\theta$ का अधिकतम माग = 1

इस स्थिति में $\sin\theta$ व $\cos\theta$ की घात सम होनी चाहिए।

त्रिकोणमिति असमिका (Trigonometric inequality)

If $\boxed{0 < \theta < 90}$

➢ θ के बढ़ने पर sinθ का मान बढ़ता है। (The value of sinθ increases as the value of θ increase)

➢ θ के बढ़ने पर tanθ का मान बढ़ता है। (The value of tanθ increases as the value of θ increase)

➢ θ के बढ़ने पर secθ का मान बढ़ता है। (The value of secθ increases as the value of θ increase)

अतः sinθ, tanθ या secθ की असमिका समान चिह्न का पालन करती है।

Hence, the inequality sinθ, tanθ or secθ follow the same sign.

तब/then, $\sin\theta_1 > \sin\theta_2 = \theta_1 > \theta_2$

$\tan\theta_1 > \tan\theta_2 = \theta_1 > \theta_2$

$\sec\theta_1 > \sec\theta_2 = \theta_1 > \theta_2$

➢ θ के बढ़ने से cosθ का मान घटता है। (The value of cosθ decreases as the value of θ increase)

➢ θ के बढ़ने से cotθ का मान घटता है।(The value of cotθ decreases as the value of θ increase)

➢ θ के बढ़ने से cosecθ का मान घटता है।(The value of cosecθ decreases as the value of θ increase)

अतः cosθ, cotθ तथा cosecθ की असमिका विपरीत चिह्न का पालन करती है।

Hence, the inequality sinθ, tanθ or secθ follow the opposite sign.

तब/then, $\cos\theta_1 > \cos\theta_2 = \theta_1 < \theta_2$

$\cot\theta_1 > \cot\theta_2 = \theta_1 < \theta_2$

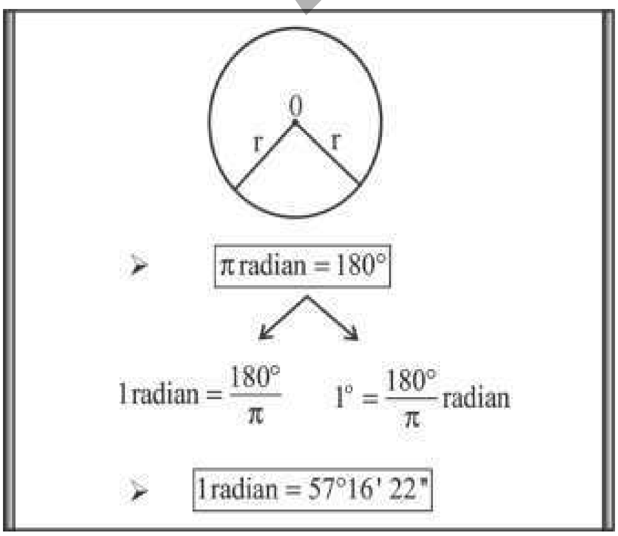
$\mathrm{cosec}\,\theta_1 > \mathrm{cosec}\,\theta_2 = \theta_1 < \theta_2$

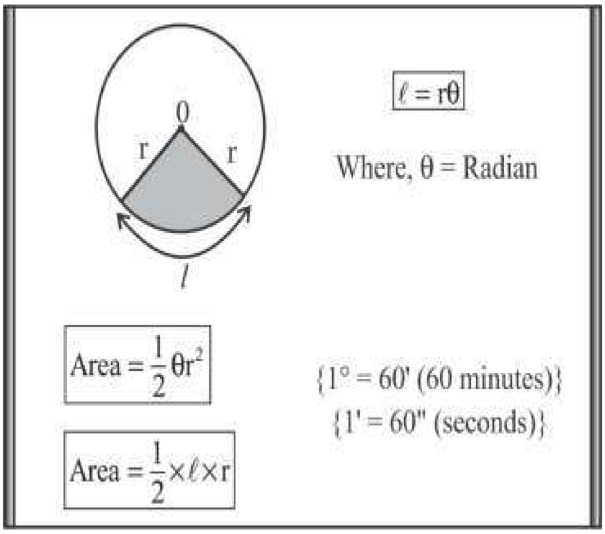
Trick:– ['C' फलन अर्थात cosθ, cotθ, cosecθ में असमिका का चिह्न पलट जाता है।]

Ratio	I quadrant	II quadrant	III quadrant	IV quadrant
sinθ	increase from 0 to 1	decreases from 1 to 0	decreases from 0 to –1	increase from –1 to 0
cosθ	decrease from 1 to 0	decreases from 0 to –1	increase from –1 to 0	increase from 0 to 1
tanθ	increase from 0 to ∞	increase from –∞ to 0	increase from 0 to ∞	increase from –∞ to 0
cotθ	decreases from ∞ to 0	decreases from 0 to –∞	decreases from ∞ to 0	decreases from 0 to –∞
secθ	increase from 1 to ∞	increase from –∞ to –1	decreases from –1 to –∞	decreases from ∞ to 1
cosecθ	decreases from ∞ to 1	increase from 1 to ∞	increase from –∞ to –1	decreases from –1 to –∞

TEAM SPY

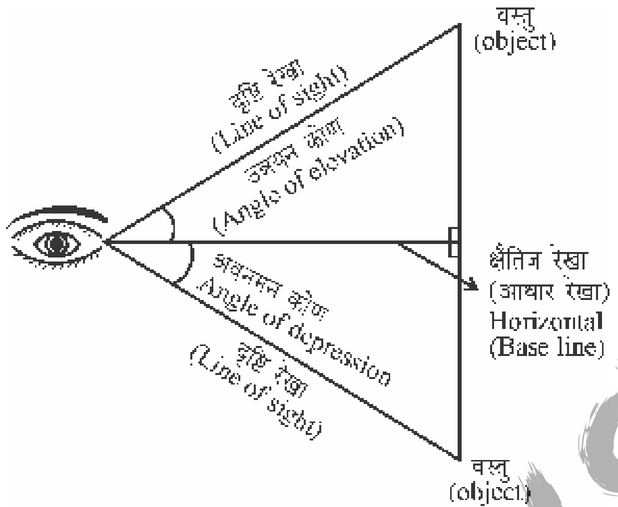
रेडियन तथा अंश में सम्बन्ध
(Relation between ration and degree)





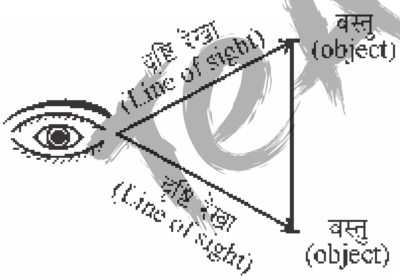
23 ऊँचाई और दूरी (Height & Distance)

ऊँचाई और दूरी (Height and Distance)



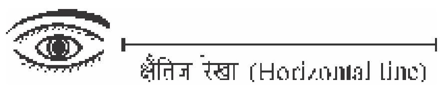
दृष्टि रेखा (line of sight):– दृष्टि रेखा प्रेक्षक की आँख से प्रेक्षक द्वारा देखी गई वस्तु के बिन्दु को मिलाने वाली रेखा होती है।

The line which is drawn from the eyes of the observer to the point being viewed on the object.



क्षैतिज रेखा या आधार रेखा (Horizontal line or Base line):– यदि व्यक्ति सिर को उठाया या झुकाय बिना ठीक सामने की ओर देखे तो यह रेखा क्षैतिज रेखा कहलाती है।

If the person looks straight ahead without lifting or bending the head, then this line is called horizontal line.

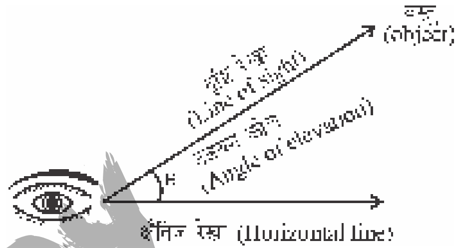


अन्नयन या उन्नतांश कोण (Angle of elevation) :–

''आँख का ऊपर की ओर उठाना'' यदि किसी वस्तु को देखने के लिऐ आँख (या सिर) को ऊपर की ओर उठाना पड़े तो दृष्टि रेखा तथा क्षैतिज रेखा के बीच का कोण उन्नयन कोण कहलाता है।

The term angle of elevation denotes the angle from the horizontal upward to an object.

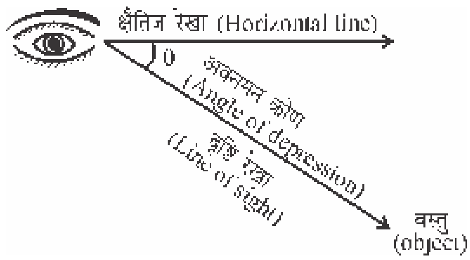
If the line of sight is upward from the horizontal line then the angle formed is an angle of elevation.



अवनमन कोण या अवनतांश कोण (Angle of depression):– अवनमन का शाब्दिक अर्थ है ''नीचे की ओर झुकना'' अगर किसी वस्तु को देखने के लिऐ सिर को नीचे की ओर झुकाना पड़े तो दृष्टि रेखा और क्षैतिज रेखा के बीच का कोण अवनमन कोण कहलाता है।

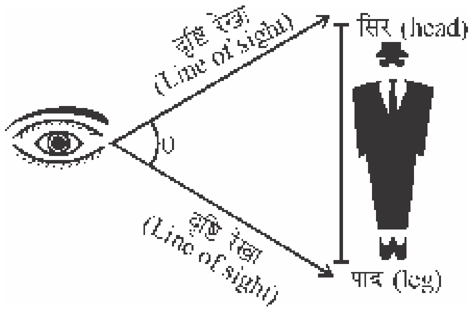
The term angle of depression denotes the angle from the horizontal downward to an object.

If the line of sight is downward from the horizontal line then the angle formed is an angle depression.



अन्तरिक कोण (Subtended angle):– दोनों दृष्टि रेखाओं के बीच बना कोण अर्थात किसी वस्तु के सिर तथा पाद (पैर) द्वारा बना कोण अन्तरिक कोण कहलाता है।

The angle formed between both lines of sight, i.e. the angle subtended by the head and legs of an object is called the subtended angle.



पूरक कोण/कोटिपूरक कोण (Complementary angle):–

दो कोणों का ऐसा युग्म जिसका योग 90° होता है।

Two angles are called complementary when their measures add to 90°.

यदि α, β एक दूसरे के पूरक होगे।/If α, β are complementary each other.

तब/then, $\boxed{\alpha+\beta=90}$

➢ θ का पूरक $(90-\theta)$ होगा।

$(90-\theta)$ is the complementary angle of θ.

सम्पूरक कोण/अनुपूरक कोण (Supplementary angle):–

दो कोणों का ऐसा युग्म जिसका योग 180° होता है।

Two angles are called supplementary when their measures add to 180°.

यदि α. β एक दूसरे के सम्पूरक हैं,

If α, β are supplementary angle each others.

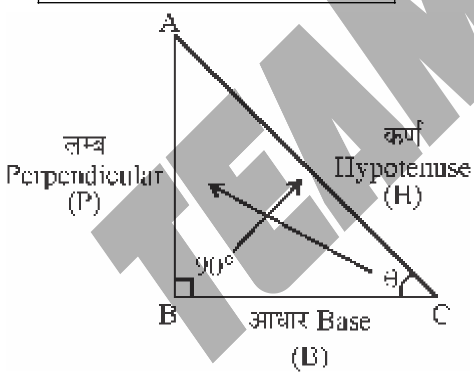
तब/then, $\boxed{\alpha+\beta=180°}$

➢ θ का सम्पूरक $(180-\theta)$ होगा।

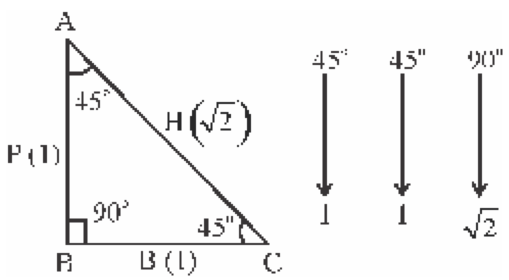
$(180°-\theta)$ is the supplementary angle of θ.

कोण-भुजा अनुपात (Angle-side ratio)

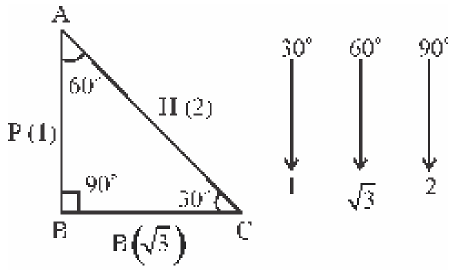
$$\tan\theta=\frac{\text{लम्ब (Perpendicular)}}{\text{आधार (Base)}}=\frac{P}{B}$$



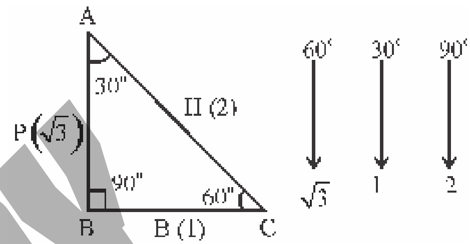
➢ $\tan 45=\frac{1}{1}\Rightarrow\frac{P}{B}=\frac{1}{1}$



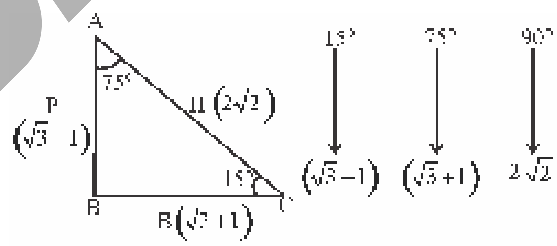
➢ $\tan 30=\frac{1}{\sqrt{3}}\Rightarrow\frac{P}{B}=\frac{1}{\sqrt{3}}$



➢ $\tan 60=\frac{\sqrt{3}}{1}\Rightarrow\frac{P}{B}=\frac{\sqrt{3}}{1}$

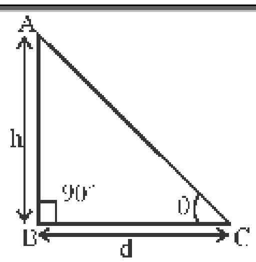


➢ $\tan 15=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}\Rightarrow\frac{P}{B}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$



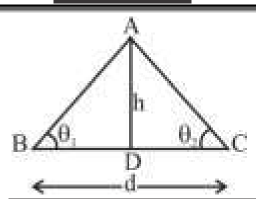
दूरी और ऊँचाई में सम्बन्ध (Relation between distance and height)

➢



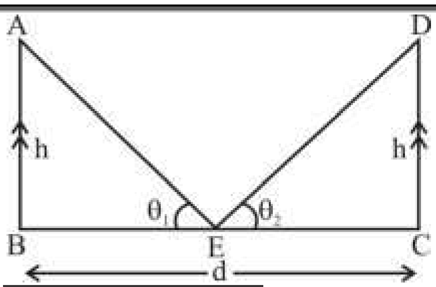
$d=h\cot\theta$

➢

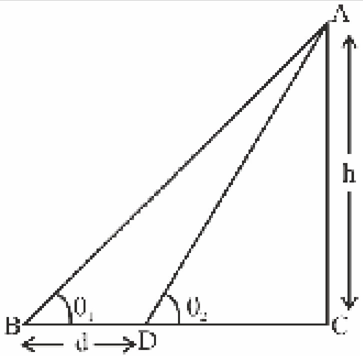


$d=h(\cot\theta_1+\cot\theta_2)$

TEAM SPY



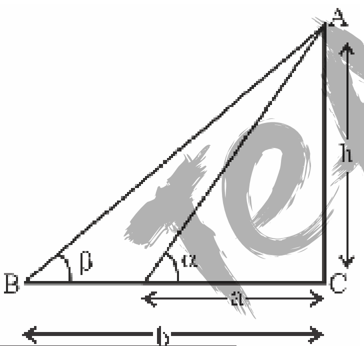
$d = h(\cot\theta_1 - \cot\theta_2)$



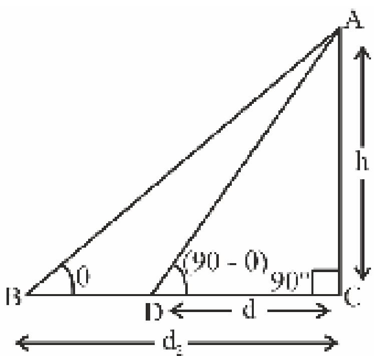
$\because \theta_1 < \theta_2$

$\therefore \cot\theta_1$ का मान $> \cot\theta_2$ का मान

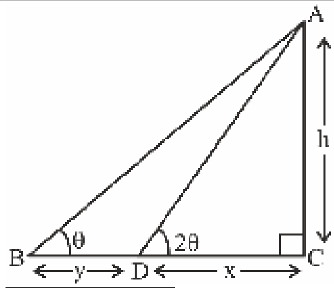
$d = h(\cot\theta_1 - \cot\theta_2)$



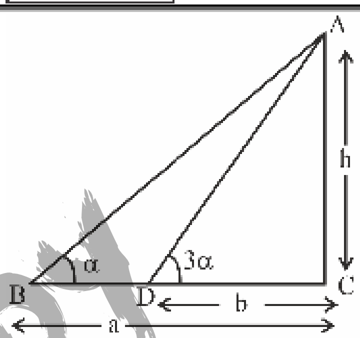
$h = \sqrt{ab\tan\alpha\tan\beta}$



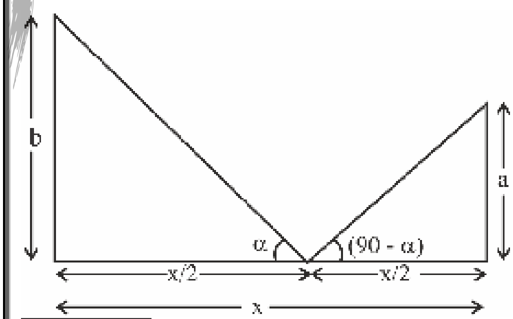
$h = \sqrt{d_1 d_2}$



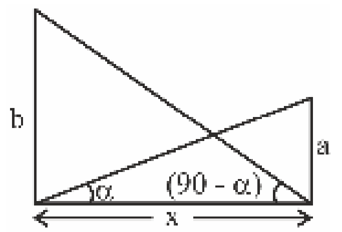
$h = \sqrt{y^2 - x^2}$



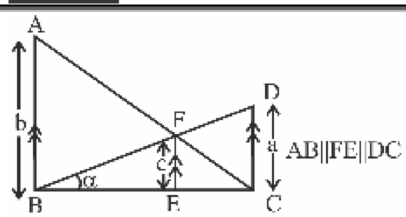
$h = a\sqrt{\dfrac{a-3b}{3a-b}}$



$h = 2\sqrt{ab}$



$x = \sqrt{ab}$



$\dfrac{1}{c} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}$

24 केन्द्रीय प्रवृत्ति की माप
(Measurement of Central Tendency)

सांख्यिकीय माध्य (केन्द्रीय प्रवृत्ति की मापों) के प्रकार

Kind of statistical average (Measures of central Tendency)

■ **गणितीय सम्बन्धी माध्य/ Mathematical Average :**

1. समान्तर माध्य/ Arithmetic average or mean
2. गुणोत्तर माध्य/ Geometric mean
3. हरात्मक माध्य/ Harmonic mean

■ **स्थिति सम्बन्धी माध्य/ Average of Position**

1. माध्यिका/Median
2. बहुलक या भूयिष्ठक/Mode
3. विभाजन मूल्य/Partition value

समान्तर माध्य
(Arithmetic average or mean)

समान्तर माध्य दो प्रकार के होते है/ There are two types of arithmetic mean :-

(i) सरल समान्तर माध्य/Simple arithmetic mean or average

(ii) भारित समान्तर माध्य/ Weighted arithmetic mean or average

(i) सरल समान्तर माध्य/Simple arithmetic mean or average–

$$\text{समान्तर माध्य} = \frac{\text{पदों का योग}}{\text{पदों की संख्या}}$$

$$\text{Mean} = \frac{\text{Sum of all observations}}{\text{Total no. of observations}}$$

$$\overline{X} = \frac{\sum X}{N}$$

Ex.1- एक मासिक परीक्षा में 10 विद्यार्थियों द्वारा अर्थशास्त्र में प्राप्त निम्न अंकों से समान्तर माध्य की गणना कीजिए?

Calculate Arithmetic mean of following marks in economics obtained by 10 students in a monthly test?

Roll No.	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Marks :	**30**	**28**	**32**	**12**	**18**	**20**	**25**	**15**	**26**	**14**

Solution :

Roll No.	Mark (X)
1	30
2	28
3	32
4	12
5	18
6	20
7	25
8	15
9	26
10	14
N = 10	$\sum X = 220$

$$\overline{X} = \frac{\sum X}{N}$$

$$\overline{X} = \frac{220}{10}$$

$$\overline{X} = 22 \text{ Marks}$$

■ **लघु रीति/Short cut Method –**

कल्पित माध्य से/Assumed mean :

$$\overline{X} = A + \frac{\sum dx}{N}$$

जहाँ/Where, A → कल्पित माध्य/assumed mean

Ex. 2- एक मासिक परीक्षा में 10 विद्यार्थियों द्वारा अर्थशास्त्र में प्राप्त निम्न अंकों से समान्तर माध्य की गणना कीजिए?

Calculate Arithmetic mean of following marks in economics obtained by 10 students in a monthly test?

Roll No.	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Marks :	**30**	**28**	**32**	**12**	**18**	**20**	**25**	**15**	**26**	**14**

लघु रीति से हल/ Shortcut method –

रोल नं./ Roll no.	**प्राप्तांक/ Score (X)**	**dx = (x–A)**
1	30	30–20 ⇒ +10
2	28	28–20 ⇒ +8
3	32	32–20 ⇒ +12
4	12	12–20 ⇒ –8
5	18	18–20 ⇒ –2

TEAM SPY

6	**A = 20**	20–20 = 0
7	25	25–20 = 5
8	15	15–20 = –5
9	26	26–20 = +6
10	14	14–20 = –6
N = 10		**Σdx = + 20**

$\bar{X} = A + \frac{\sum dx}{N}$ (A = Assumed value)

$\bar{X} = 20 + \frac{20}{10}$

$\bar{X} = 20 + 2$

$\bar{X} = 22$ Marks

■ यदि किसी चर x के मूल्य x_1, x_2, x_3................x_n है तथा उनकी आवृत्तियाँ क्रमशः f_1, f_2, f_3...............f_n है
If x_1, x_2, x_3................x_n are the value of variable x and f_1, f_2, f_3...............f_n are the respective frequencies.

समान्तर माध्य/ Mean $= \frac{f_1x_1 + f_2x_2 + ...+ f_nx_n}{f_1 + f_2..........f_n}$

$$\boxed{A.M. = \frac{f_1x_1 + f_2x_2 + ...+ f_nx_n}{f_1 + f_2..........f_n}}$$

$$\boxed{A.M. = \frac{\sum f_ix_i}{N}}$$

$$\boxed{\bar{X} = \frac{\sum f_ix_i}{N}}$$

Ex. 3- निम्न समँको से समान्तर माध्य ज्ञात करो :
Calculate Arithmetic mean from the following date :

पद मूल्य(Size) :	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
आवृत्ति (f) :	**5**	**8**	**10**	**10**	**7**

Sol.

Size (X)	**f**	**f(x)**
4	5	4 × 5 = 20
5	8	5 × 8 = 40
6	10	6 × 10 = 60
7	10	7 × 10 = 70
8	7	8 × 7 = 56
	N = 40	**Σf(x) = 246**

$\bar{X} = \frac{\sum f(x)}{N}$

$\bar{X} = \frac{246}{40} = 6.15$

Ex. 4- निम्न समँको से समान्तर माध्य ज्ञात करो :
Calculate Arithmetic mean from the following date :

पद मूल्य (Size) :	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
आवृत्ति (f) :	**5**	**8**	**10**	**10**	**7**

Sol. लघु रीति (Short cut formula)

Size (X)	**f**	**dx (A = 6)**	**fdx**
4	5	4 – 6 ⇒ – 2	5×(–2) = –10
5	8	5 – 6 ⇒ – 1	8 × (–1) = –8
A = 6	10	6 – 6 ⇒ 0	10 × 0 = 0
7	10	7 – 6 ⇒ + 1	10×1 = 10
8	7	8 – 6 ⇒ + 2	7 × 2 = 14
	N = 40		**Σfdx = + 6**

$\bar{X} = A + \frac{fdx}{N}$

$\bar{X} = 6 + \frac{6}{40} = 6 + 0.15$ $\boxed{\bar{X}\ \ 6.15}$

Ex. 5- निम्न सारणी से समान्तर माध्य (Mean) ज्ञात कीजिये:
Calculate Arithmetic mean from the following series?

मजदूरी/ Wages (Rs.)	**0-10**	**10-20**	**20-30**	**30-40**	**40-50**
मजदूरों की संख्या/ No. of workers	**8**	**12**	**20**	**6**	**4**

Sol.

मजदूरी/ Wages (Rs.)	**मध्यमान/ Mean (X)**	**मजदूरों की संख्या/No. of workers (f)**	**fx**
0-10	$\frac{0+10}{2} = 5$	8	40
10-20	$\frac{10+20}{2} = 15$	12	180
20-30	$\frac{20+30}{2} = 25$	20	500
30-40	$\frac{30+40}{2} = 35$	6	210
40-50	$\frac{40+50}{2} = 45$	4	180
		N = 50	**Σfx = 1110**

$\bar{X} = \frac{\sum fx}{N}$

$\bar{X} = \frac{1110}{50}$

$\bar{X} = 22.2$₹

Ex. 6- निम्न सारणी से समान्तर माध्य (Mean) ज्ञात कीजिये:
Calculate Arithmetic mean from the following series?

मजदूरी/ Wages (Rs.)	**0-10**	**10-20**	**20-30**	**30-40**	**40-50**
मजदूरों की संख्या/ No. of workers	**8**	**12**	**20**	**6**	**4**

Sol. लघु रीति (Short cut formula)

dx = (X-A)

मजदूरी/ Wages (Rs.)	मध्यमान/ Mean (X)	मजदूरों की संख्या / No. of workers (f)	A = 25 dx = (X–A)	fdx
0–10	$\frac{0+10}{2}=5$	8	5–25 = –20	(–20) × 8 = –160
10–20	$\frac{10+20}{2}=15$	12	15–25= –10	10×12= – 120
20–30	$\frac{20+30}{2}=25$	20	25–25 = 0	20×0 = 0
30–40	$\frac{30+40}{2}=35$	6	35–25=+10	+10×6 = 60
40–50	$\frac{40+45}{2}=45$	4	45–25 = 20	+20×4 = 80
		N = 50		**Σfdx= –140**

$$\overline{X}=A+\frac{\sum fdx}{N}$$

$$\overline{X}=25+\frac{(-140)}{50}$$

$$\overline{X}=25-\frac{140}{50}\Rightarrow 25-2.8$$

$$\overline{X}=22.2$$

पद विचलन रीति/Step Deviation formula–

$$\boxed{\overline{X}=A+\frac{\sum fd'x}{N}\times i}$$

जहाँ/Where, A → कल्पित माध्य/assumed mean

i → वर्ग अंतराल/interval

Ex. 7- निम्न सारणी से समान्तर माध्य (Mean) ज्ञात कीजिये:

Calculate Arithmetic mean from the following series?

मजदूरी/ Wages (Rs.)	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
मजदूरों की संख्या/ No. of workers	8	12	20	6	4

Sol. समान्तर माध्य का गणना (पद विचलन रीति)

(Step deviation Method)

मजदूरी / Wages (Rs.)	मध्यमान / Mean (X)	मजदूरों की संख्या / No. of workers (f)	विचलन/ Deviation A=25 dx=x-A	पद विचलन / Step deviation $d'x=\frac{dx}{i}$	fd'x
0-10	5	8	–20	–2	–16
10-20	15	12	–10	–1	–12
20-30	A =25	20	0	0	0
30-40	35	6	+10	+1	6
40-50	45	4	+20	+2	8
		N=50			**Σfd'x= –14**

$$\overline{X}=A+\frac{\sum fd'x}{N}\times i \qquad (i=\text{interval})$$

$$=25+\frac{-14}{50}\times 10 \qquad \text{जहाँ } A = 25,$$

$$=25+\left(\frac{-14}{5}\right)\Rightarrow 25-2.8 \qquad \text{उभयनिष्ठ गुणक (i) =10}$$

$$\Rightarrow 22.2$$

➢ असमान वर्गान्तर/ Unequal Intervals

Ex. 8- निम्न संमको से माध्य (Mean) की गणना कीजिए :

Calculate mean from the following data :

Class	f	Class	f
0-3	**6**	**10-15**	**12**
3-6	**14**	**15-25**	**10**
6-10	**25**	**25-50**	**3**

Solution :

Class	M.V. (X)	f	f(x)
0-3	1.5	6	9.0
3-6	4.5	14	63.0
6-10	8.0	25	200.0
10-15	12.5	12	150.0
15-25	20	10	200.0
25-50	37.5	3	112.5
		N=70	Σfx=734.5

$$\overline{X}=\frac{\sum fx}{N}=\frac{734.5}{70}=10.49$$

अज्ञात मूल्य या आवृत्ति का निर्धारण/ Location of Missing Size or frequency :

Ex. 9- यदि माध्य 30 हो तो निम्न सारणी से अज्ञात आवृत्ति ज्ञात करों?

Find out missing frequency in the following take, if mean in 30 :

Class	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
Frequency	5	6	10	?	13

Solution :

अज्ञात आवृत्ति को y मानकर गणना निम्न प्रकार की जाती :

Let the missing frequency = y :

Class	M.V. (X) मध्य मान	f	f(x)
0-10	5	5	25
10-20	15	6	90
20-30	25	10	250
30-40	35	**y**	35y
40-50	45	13	585
		N=34+y	Σf(x)= ⇒ 950+35y

$$\overline{X}=\frac{\sum fx}{N}$$

$$30=\frac{950+35y}{34+y}$$

TEAM SPY

$$1020+30y=950+35y$$
$$35y-30y=1020-950$$
$$5y=70$$
$$\boxed{y=14}$$

अज्ञात आवृत्ति/Missing frequency = 14

Ex. 10- यदि माध्य 41 हो तों निम्न संमको से अज्ञात पद ज्ञात करों?

If mean is 41, find out the missing size from the following :

Class	**20**	**30**	**?**	**50**	**60**	**70**
No of students	**8**	**12**	**20**	**10**	**6**	**4**

Solution :

Size/Class (X)	f	fx
20	8	160
30	12	360
A	20	20A
50	10	500
60	6	360
70	4	280
	N = 60	Σfx = 1660 + 20A

$$\bar{X}=\frac{\sum fx}{N}$$
$$41=\frac{1660+20A}{60}$$
$$2460=1660+20A$$
$$20A=2460-1660$$
$$20A=800$$
$$\boxed{A=40}$$

अज्ञात पद/Missing term = 40

(ii) भारित समान्तर माध्य (Weighted Arithmetic mean)–

भारित समान्तर माध्य/Weighted arithmetic mean

$$=\frac{x_1w_1+x_2w_2+x_3x_3..........+x_nw_n}{w_1+w_2+..........w_n}$$

$$\boxed{\bar{X}_w=\frac{\sum Xw}{\sum w}}$$

जहाँ/where,

w1, w2 ..... wn → सम्बन्धित भार/corresponding weight

Ex. 11- एक विद्यार्थी द्वारा बी.ए. की परीक्षा में प्राप्त अंकों का प्रतिशत निम्न प्रकार है-अंग्रेजी 60, हिन्दी 70, गणित 75 अर्थशास्त्र 50 तथा समाजशास्त्र 55 है, प्राप्तांकों का भारित समान्तर माध्य ज्ञात कीजिये, यदि इन विषयों का भार क्रमशः 1, 2, 1, 3 तथा 3 हो।-

A candidate obtained the following percentages in B.A. Examination-English 60, Hindi 70, Mathematics 75, Economics 50 and Sociology 55, find weighted Arithmetic mean or marks if weights of these subjects are 1, 2, 1, 3 and 3 respectively.

Solution :

भारित समान्तर माध्य की गणना :

विषय/ Subject	**प्रतिशत/ Percentage (X)**	**भार/ Weight (w)**	**WX**
अंग्रेजी/ English	60	1	60
हिन्दी/ Hindi	70	2	140
गणित/ Maths	75	1	75
अर्थशास्त्र/ Economics	50	3	150
समाजशास्त्र/ Sociology	55	3	165
		Σ w = 10	Σwx = 590

$$\bar{X}_w=\frac{\sum wx}{\sum w}$$
$$=\frac{590}{10}=59$$

Ex. 12- निदेशको के निम्न समंको के आधार पर भारित समान्तर माध्य की गणना कीजिए?

Complete the weighted Arithmetic mean of the Index number from the data given below :

समूह/ Group	**निर्देशांक/ Index No.**	**भार/ Weight**
भोजन/Food	125	7
कपड़े/Cloths	130	5
ईंधन एवं प्रकाश/Fuel and light	140	4
मकान किराया/House rent	170	1
विविध/Miscellaneous	180	3

Solution :

Calculation of weighted Arithmetic mean :

समूह/ Group	**निर्देशांक/ Index No.**	**भार/ Weight**	**WX**
भोजन/Food	125	7	875
कपड़े/Cloths	130	5	650
ईंधन एवं प्रकाश/Fuel and light	140	4	560
मकान किराया/ House rent	170	1	170
विविध/Miscellaneous	180	3	540
		ΣW = 20	ΣXw ⇒ 2795

$$\bar{X}w=\frac{\sum Xw}{\sum w}$$
$$\bar{X}w=\frac{2795}{20}=139.75$$

गुणोत्तर माध्य (Geometric Mean)

a, b का गुणोत्तर माध्य (GM) $= \sqrt{a \times b}$

Geometric mean of a and b (GM) $= \sqrt{a \times b}$

a, b, c का गुणोत्तर माध्य (GM) $= \sqrt[3]{a \times b \times c}$

Geometric mean of a, b and c (GM) $= \sqrt[3]{a \times b \times c}$

a, b, c............n पदो का गुणोत्तर माध्य

Geometric mean of a, b, c............n

(GM) $= \sqrt[n]{a \times b \times c........n \text{ पदो तक/term}}$

ध्यान रखने योग्य बाते/ Points to be kept in mind –

(1) किसी भी पद का मूल्य शून्य नहीं होना चाहिए, अन्यथा गुणनफल शून्य हो जायेगा और गुणोत्तर माध्य शून्य हो जायेगा।
The value of any term should not be zero otherwise the product will be zero and the geometric mean will be zero.

(2) पदो के ऋणात्मक होने की स्थिति में गुणोत्तर माध्य काल्पनिक संख्या हो सकती है।
In case the terms are negative, the geometric mean can be an imaginary number.

(3) दो या तीन संख्याओं की दिशाओं में वर्गमूल या घनमूल आसानी से निकाला जा सकता है, लेकिन इससे अधिक संख्याओं के होने पर गणितीय क्रिया जटिल हो जाती है और लघुगणक (Logarithms) तथा प्रतिलघुगणक (Anti logarithms) का प्रयोग करना होता है।
In the case of two or three numbers, the square root or cube root can be easily calculated, but when there are more number than this, the mathematical operation becomes complicated and logarithms and anti-logarithms have to be used.

$$GM = \text{Anti}\log\left[\frac{\log a + \log b + ...\log n}{N}\right]$$

$$GM = \text{Anti}\log\left[\frac{\sum \log X}{N}\right]$$

गुणोत्तर माध्य के विशिष्ट प्रयोग/ Special uses of Geometric mean :

गुणोत्तर माध्य का विशिष्ट प्रयोग प्रतिशत वृद्धि दरों और अनुपातो का औसत निकालने में किया जाता है।

जनसंख्या वृद्धि, मूल्यवृद्धि, विकास की दर, चक्रवृद्धि ब्याज, घटते शेष पर ह्रास, इत्यादि की दिशा में औसत की गणना गुणोत्तर माध्य द्वारा की जाती है।

The specific use of geometric mean is to find the average of percentage growth, rates and ratios.

In case of population growth, price rise, rate of development, compound interest, depreciation on reducing balance etc., the average is calculated by geometric mean.

प्रश्न : निम्नलिखित का गुणोत्तर माध्य ज्ञात कीजिए ?
Find out G.M. of the following?
(a) 4, 9 (b) 3, 8, 9 (c) 4, 16

Solve :

(a) $4, 9 \quad GM = \sqrt{4 \times 9}$
$= \sqrt{36}$
$\Rightarrow 6$

(b) $3, 8, 9 \quad GM = \sqrt[3]{3 \times 8 \times 9}$
$= \sqrt[3]{216}$
$\Rightarrow 6$

(c) $4, 16, GM = \sqrt{4 \times 16}$
$\Rightarrow \sqrt{64}$
$\Rightarrow 8$

हरात्मक माध्य (Harmonic mean)

आशय (Meaning)–यदि किसी श्रेणी के पदों की संख्या (Number of terms) में उन पदों के व्युत्क्रमों (Reciprocal) के योग का भाग दे दिया जाए, तो प्राप्त भागफल उस श्रेणी का हरात्मक माध्य होता है।

अथवा मूल्यो के व्युत्क्रमों के समान्तर माध्य के व्युत्क्रम को उनका हरात्मक माध्य कहा जाता है।

If the number of terms in a series is divided by the sum of the reciprocals of those terms, then the quotient obtained will be the harmonic mean of that series.

OR

Harmonic Mean of a series is the Reciprocal of the arithmetic average of the reciprocals of the values of its various terms.

यदि x_1, x_2, x_3 .... x_n किसी व्यक्तिगत श्रेणी के पद है

If x_1, x_2, x_3 .... x_n are the individual items up to n terms, then,

Harmonic mean,

$$HM = \frac{n}{(1/x_1) + (1/x_2) + (1/x_3) + ...(1/x_n)}$$

■ **यदि a, b, c तीन धनात्मक संख्याए हैं, तब–**

➢ दो संख्याओं का हरात्मक माध्य/ Harmonic mean of a and b $= \frac{2ab}{a+b}$

➢ तीन संख्याओं का हरात्मक माध्य/Harmonic mean of a, b and c $= \frac{3abc}{ab+bc+ca}$

➢ चार संख्याओं का हरात्मक माध्य/Harmonic mean of a, b, c and d $= \frac{4abcd}{abc+bcd+cda+dab}$

➢ पाँच संख्याओं का हरात्मक माध्य/Harmonic mean of a, b, c, d and e =
$$\frac{5abcde}{abcd+bcde+cdea+deab+eabc}$$

TEAM SPY

प्रश्न : 20, 15, 10, 5, 6 का हरात्मक माध्य (Harmonic Mean) ज्ञात करें?-

Find the harmonic mean of 20, 15, 10, 5, 6 :

Solve : $HM = \dfrac{1}{\dfrac{\left(\frac{1}{20}+\frac{1}{15}+\frac{1}{10}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)}{5}}$

$= \dfrac{5}{\left(\frac{1}{20+15}\frac{1}{10}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)}$

$= \dfrac{5}{\dfrac{3+4+6+12+10}{60}} \Rightarrow \dfrac{5\times 60}{35}$

$= \dfrac{5\times 60}{35}$

$= \dfrac{60}{7} = 8.57$

$HM = \ \text{Reci}\left[\dfrac{\sum \text{Reci}\,X}{N}\right]$

[Reci ⇒ Reciprocal व्युत्क्रमानुपाती]

हरात्मक माध्य के विशिष्ट प्रयोग/Specific uses of Harmonic Mean–

- औसतगति/Average speed
- मूल्य – आय अनुपात/Price - earnings ratio

समान्तर माध्य, गुणोत्तर माध्य और हरात्मक माध्य के मध्य सम्बन्ध (Relation between Arithmetic Mean, Geometric mean and Harmonic mean)

(1) यदि समंक माला में सभी पदों के मूल्य समान हो, तो समान्तर माध्य, गुणोत्तर माध्य और हरात्मक माध्य समान होते है।
If all the terms in a series have the same values then the arithmetic mean, geometric mean and harmonic mean values will be equal -

$\boxed{AM = GM = HM}$

Ex.: माना दो पद है और दोनों का मूल्य 8 और 8 है। तो
Let, taking two terms which value 8 and 8 :

$AM = \dfrac{8+8}{2} \Rightarrow \dfrac{16}{2} \Rightarrow \underline{\underline{8}}$

$GM = \sqrt[2]{8\times 8} \Rightarrow 8$

$HM = \dfrac{2}{\frac{1}{8}+\frac{1}{8}} \Rightarrow \dfrac{2}{\frac{2}{8}} \Rightarrow \underline{\underline{8}}$

(2) यदि समंकमाला में सभी पदों के मूल्य समान न हो तो हरात्मक मान सबसे छोटा गुणोत्तर माध्य उससे बड़ा और समान्तर माध्य सबसे बड़ा होता है।
If all the terms in a series have not the same values the -

$\boxed{AM > GM > HM}$

यदि दोनों सम्बन्धों को एक साथ लेने पर/If both relation taking together,–

$\boxed{AM \geq GM \geq HM}$

Ex.: माना दो पद है उनके मूल्य 4 और 16 है। तो
Let, taking two terms which value 4 and 16 :

$A.M. = \dfrac{4+16}{2} \Rightarrow \dfrac{20}{2} \Rightarrow 10$

$G.M. = \sqrt[2]{4\times 16} \Rightarrow \sqrt[2]{64} \Rightarrow 8$

$H.M. = \dfrac{2}{\frac{1}{4}+\frac{1}{16}}$

$\dfrac{2}{\frac{4+1}{16}} \quad \dfrac{16\times 2}{5}$

$\dfrac{32}{5} \quad \underline{\underline{6.4}}$

अतः/hence, $\boxed{AM > GM > HM}$

(3) यदि दो पद हो तो उनका गुणोत्तर माध्य उनके समान्तर तथा हरात्मक माध्य के गुणनफल के वर्गमूल के बराबर होता है अर्थात्‌
If there are two terms, then their geometric mean is equal to the square root of the product of their arithmetic mean and harmonic mean-

$\boxed{GM = \sqrt{AM \times HM}}$

Ex.: 4, 16 का $AM = \dfrac{4+16}{2} \Rightarrow \dfrac{20}{2} = 10$

4, 16 का $GM = \sqrt[2]{4\times 16} \Rightarrow 8$

4,16 का $HM = \dfrac{2}{\frac{1}{4}+\frac{1}{16}}$

$\Rightarrow \dfrac{2}{\frac{4+1}{16}} \Rightarrow \dfrac{2\times 16}{5}$

$\Rightarrow \dfrac{32}{5} = 6.4$

$\because \quad GM = \sqrt{AM \times HM}$

$\sqrt{10 \quad 6.4}$

$\sqrt{64}$

8

माध्यिका (Median)

1. व्यक्तिगत श्रेणी (Individual Series) में माध्यिका की गणना–श्रेणी को आरोही या अवरोही क्रम में व्यवस्थित करते है यदि पदों की संख्या विषम (Odd) है,तो
If in the series first of all the terms are arranged in ascending or descending order.

जब पदों की संख्या विषम हो/Number of observations is odd–

माध्यिका $M = \frac{N+1}{2}$ वाँ पद का मान

Median = $\frac{n+1}{2}^{th}$ term

जब पदों की संख्या सम हो/Number of observations is even–

माध्यिका = $\frac{1}{2}$ $\frac{n}{2}$ वाँ पद का मान + $\frac{N}{2}+1$ वाँ पद का मान

Median (M) = $\frac{1}{2}$ $\frac{n}{2}^{th}$ term + $\frac{n}{2}+1^{th}$ term

2. खण्डित श्रेणी (Discrete Series) में माध्यिका की गणना– इसमें माध्यिका ज्ञात करने के लिए पदों को आरोही या अवरोही क्रम में व्यवस्थित करने की अवश्यकता नहीं होती क्योकि खण्डित श्रेणी में संचयी अवृत्तियाँ (Cumulative frequencies) ज्ञात की जाती है। जो स्वंय आरोही या अवरोही क्रम में होती हैं।

Discrete Series– In this, there is no need to arrange the items in ascending or descending order to find the median because in the discrete series the commutative frequencies are determined which themselves are in ascending or descending order.

➢ सर्वप्रथम संचयी आवृत्ति (c.f) ज्ञात करते हैं।/First determine the cumulative frequency (cf).

➢ $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ सूत्र से माध्यिका पद ज्ञात करते है।

Find the median term by using given formula–

Median, M = $\frac{n+1}{2}^{th}$ term

➢ अंत में माध्यिका उस पद का मान होता है जिसकी संचयी आवृत्ति में $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ वां पद आता है।/Finally, the median is the value of the term which cumulative frequency in $\frac{n+1}{2}^{th}$ term.

3. संतत शृंखला के लिए माध्यिका की गणना/ Calculation of Median for continuous series–

➢ सर्वप्रथम संचयी आवृत्ति (c.f) ज्ञात की जाती है।/First determine the cumulative frequency (cf).

➢ माध्यिका पद ज्ञात करने के लिए मध्यवर्ग ज्ञात करते है, जो $\frac{N}{2}$ वां पद (न कि $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ वां पद होता है,

To find the median term, find the middle class $\frac{n}{2}^{th}$ term and not $\frac{n+1}{2}^{th}$ term.

➢ क्योंकि सतंत श्रेणी में $\frac{N}{2}$ वें पद का मूल्य ही माध्यिका होता है

Because the value of $\frac{n}{2}^{th}$ term in a continuous series is the median.

अंत में निम्न सूत्र का प्रयोग करते है।

Finally we use the following formula :

$$\text{माध्यिका/Median } (M) = l + \frac{\frac{1}{2}N - cf}{f} \times h$$

जहाँ/Where, l = माध्यिका वर्ग की निम्न सीमा/ lower limit of the median class

N = कुल आवृत्ति/ total of all the frequencies

cf = माध्यिका वर्ग के पूर्व वर्ग की संचयी आवृत्ति/ cumulative frequency of the class preceding the median class

f = माध्यिका वर्ग की आवृत्ति/ frequency of the median class

h = माध्यिका वर्ग अन्तराल की माप/ interval of the median class

Ex.1- निम्न समंको से माध्यिका (Median) निर्धारित कीजिये?

Determine Median from the following data?

20, 25, 23, 25, 27, 40, 23, 15, 25

Solutions :

मूल्यों को आरोही क्रम में निम्न प्रकार क्रमबद्ध (Array) किया जा सकता है। (कोई भी क्रम लेने पर आरोही/अवरोही)

The values can be sorted in ascending order as follows :

क्रम संख्या/ Number	पद मूल्य/ Value
1	15
1	20
3	23
5	25
6	25
7	25
8	27
9	40

Median = $\frac{(N+1)^{th}}{2}$ term (Odd)

= $\frac{9+1}{2}^{th}$ term

= $\frac{10}{2}^{th}$ term 5th term

5^{th} term = 25

TEAM SPY

Ex.2- विद्यार्थियों के निम्न प्राप्तांक से माध्यिका मूल्य ज्ञात कीजिए।/Calculate Median from the marks obtained by 10 students?

Roll No. :	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
	7	**8**	**9**	**10**		
Marks :	**25**	**28**	**29**	**45**	**42**	**30**
	35	**33**	**32**	**32**		

Solution :

अंकों को आरोही क्रम (Ascending order) में निम्न प्रकार क्रमबद्ध किया जा सकता है :

The values can be sorted in ascending order as follows :

25, 28, 29, 30, 32, 33 33, 35, 42, 45

$$\text{Median} = \frac{1}{2}\left[\frac{n}{2}^{th}\text{term} + \left(\frac{n}{2}+1\right)^{th}\text{term}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{10}{2}\text{term} + \left(\frac{10}{2}+1\right)\text{term}\right]$$

$$= \frac{1}{2}[5\,\text{term} + 6\,\text{term}]$$

$$= \frac{1}{2}[32+33] = \frac{1}{2}[65] \quad 32.5$$

Ex.3-

वेतन (Salary). :	10	11	12	13	14
	15	16	17	18	
कर्मचारियों की संख्या :	2	5	6	8	10
No. of employees	12	7	4	1	

Solution : **माध्यिका की गणना**

वेतन (Salary)	**कर्मचारी (No. of employees) (f)**	**संचयी आवृत्ति (Cumulative frequency)**
10	2	2
11	5	7
12	6	13
13	8	21
14	**10**	**31**
15	12	43
16	7	50
17	4	54
18	1	55

$$\text{Median No.} = \left(\frac{N+1}{2}\right)^{th}\text{term}$$

$$= \left(\frac{55+1}{2}\right)^{th}\text{term} = 28^{th}\text{term}$$

28वाँ पद संचयी आवृत्ति 31 में विद्यमान है। अतः इसके सामने वाला मूल्य 14 माध्यिका होगा।

The 28^{th} term is present in cumulative frequency 31, so the value in front of it will be 14 median.

Ex. 4- निम्न सारणी से माध्यिका की गणना करो।

Calculate Median from the following table?

X :	**7**	**5**	**6**	**8**	**10**	**9**
f :	**3**	**4**	**7**	**2**	**5**	**8**

Solution :

X के मानो को आरोही क्रम में रखने पर,

By arranging the value of X in ascending order :

X	f	cf
5	4	4
6	7	11
7	3	14
8	**2**	**16**
9	8	24
10	7	29

$$\text{Median No} = \left(\frac{N+1}{2}\right)^{th}\text{term}$$

$$= \left(\frac{29+1}{2}\right)^{th}\text{term} = 15^{th}\text{term}$$

15वाँ पद संचयी आवृत्ति 16 में विद्यमान है।

अतः माध्यिका = 8

The 25^{th} term is present in cumulative frequency 16. Hence, median = 8.

Ex. 5- निम्न समंको से माध्यिका (Median) ज्ञात कीजिये।

Find out Median from the following data :

वर्गान्तर (Interval):	**0-10**	**10-20**	**20-30**	**30-40**	**40-50**
आवृत्ति (f) :	**3**	**5**	**8**	**5**	**3**

Solution :

वर्गान्तर (Interval)	**आवृत्ति (Frequency) (f)**	**cf**
0 –10	3	3
10 – 20	5	8 = F
20 – 30	**8 = f**	**16**
30 – 40	5	21
40 – 50	3	24

N = 24

12 वाँ पद संचयी आवृत्ति 16 में विद्यमान है अतः इसके सामने वाला वर्गान्तर 20-30 माध्यिका वर्गान्तर होगा जिसमें सूत्र लगाने पर/ The 12th term is present in cf 16. Therefore the interval in front of it will be the interval 20-30.

$$\text{Median} = \ell + \frac{\left(\frac{N}{2}-F\right)}{f}\times h \qquad \left\{\begin{matrix}\text{Trick}\\ \frac{20+30}{2}\\ \Rightarrow 25\end{matrix}\right\}$$

$$20 + \frac{\left(\frac{24}{2}-8\right)}{8}\times 10 = 20 + \left(\frac{4}{8}\times 10\right) = 20+5 = 25$$

Ex. 6- आरोही क्रम में लगे अवलोकन 10, 12, 13, 16 (X+1), (X+3), 32, 36, 40, 45 की माध्यिका 22 है। X का मान ज्ञात करें?

The median of observation 10, 12, 13, 16, (X+1) (X+3), 32, 36, 40, 45 arranged in ascending order is 22 find the value of X.

Solution :

Observations are :

<u>10</u>, <u>12</u>, <u>13</u>, <u>16</u>, <u>(x+1)</u>, <u>(x+3)</u>, <u>32</u>, <u>36</u>, <u>40</u>, <u>45</u> Total No. of observations = 10

$$\text{Median} = \frac{1}{2}\left[\frac{n}{2}\text{th term} + \left(\frac{n}{2}+1\right)\text{th term}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{10^{th}}{2}\text{ term} + \left(\frac{10}{2}+1\right)^{th}\text{ term}\right]$$

$$\text{Median} = \frac{1}{2}[5\text{th term} + 6\text{th term}]$$

$$22 = \frac{1}{2}[(X+1)+(X+3)]$$

$$22 = \frac{1}{2}[2x+4] \Rightarrow 22 = X+2$$

$$\boxed{X = 20}$$

Ex.7- निम्न विवरण से माध्यिका (Median) का निर्धारण कीजिए?/Find the median from the given data :

अंक (Marks) :	**6-10**	**11-15**	**16-20**	**21-25**	**26-30**
छात्रों की संख्या :	**20**	**30**	**50**	**40**	**10**

Solution :

Note : समावेशी श्रेणी में माध्यिका निकालने के लिये यह आवश्क है कि उसे पहले अपवर्णी श्रेणी में बदल लिया जाए, जिससे सूत्र में a_1 के लिए सही न्यूनतम सीमा (True Lower limit) लिखी जा सके।/To find the median in an inclusive series it is necessary to first convert in to an sequential series, so that the correct minimum limit for "a" can be written in the formula.

Class Interval	f	c.f.
6-10	20	20
11-15	30	50F
16-20	50f	100
21-25	40	140
26-30	10	150

$$\text{Median No.} = \frac{M}{2}\text{ th term} = \frac{150}{2}\text{ th term} = 75\text{ th term.}$$

$$\text{Median} = \ell + \frac{\frac{N}{2} - F}{f} \times h$$

$$= 16 + \frac{\frac{150}{2} - 50}{50} \times 4$$

$$= 16 + \frac{25}{50} \times 4 \Rightarrow 16 + 2 = 18$$

सतत् श्रेणी में आवृत्ति शून्य होना (Zero frequency in continuous series)–

यदि सतत् श्रेणी में कोई या कुछ आवृत्ति शून्य होती है और माध्यिका नम्बर उन शून्य आवृत्ति या आवृत्तियों के सामने वाली संचयी आवृत्तियों में पड़ता है, तो शून्य आवृत्ति वाले वर्गान्तरों को समाप्त कर दिया जाता है तथा ऐसे समाप्त किए जाने वाले वर्गान्तर या वर्गान्तरो का आधा भाग उनसे ऊपर और नीचे के वर्गान्तरों में मिला दिया जाता है।

If any or some frequency in a continuous series is zero and the number of median falls in the cumulative frequencies in front of those frequency or frequencies, then the class intervals with zero frequency are eliminated and half of the class intervals or classes to be eliminated are added to the top of bottom sections.

Ex.1- निम्न आवृत्ति वितरण में माध्यिका (Median) का मान ज्ञात करें?

Find the median from the given data :

Class	f	Class	f
0-5	3	20-25	0
5-10	4	25-30	14
10-15	6	30-35	6
15-20	12	35-40	5

Solution :

Class	f	cf
0-5	3	3
5-10	4	7
10-15	6	**13 F**
15-20	**12 f**	25
20-25	0	25
25-30	14	39
30-35	6	45
35-40	5	50

$$\text{M. No.} = \frac{50}{2} = 25$$

$$M = \ell + \frac{\frac{N}{2} - F}{f} \times h$$

$$\Rightarrow 15 + \frac{\frac{50}{2} - 13}{12} \times 5$$

$$\Rightarrow 15 + \frac{25-13}{12} \times 5$$

$$\Rightarrow 15 + \frac{12}{12} \times 5$$

$$\Rightarrow 15 + 5$$

$$\Rightarrow 20$$

बहुलक या भूयिष्ठक (Mode)

'Mode' शब्द फ्रैंच भाषा La-Mode से बना है, जिसका अर्थ है फैशन या रिवाज।

TEAM SPY

इस सन्दर्भ में यह कहाँ जाता है कि "Mode means most fashionable term."

सांख्यिकी में बहुलक का आशय ऐसे मूल्य से है जिसकी पुनरावृत्ति सबसे अधिक बार हुई हो।

केनी और कीपिंग (Kenney and keeping) के अनुसार "सांख्यिकी में बहुलक उस मान को कहते है जो समंक माला में सबसे अधिक बार आता हो"।

The word "mode" is derived from the French language "La-Mode" which means fashion and customs.

"The value of variable which has the maximum frequency in called the mode."

Ex.: एक जूता विक्रेता के यहाँ एक दिन में बिकने वाले जूते के आँकड़ो को निम्न संख्या से बहुलक (Mode) ज्ञात कीजिए?/Find out mode from the following data of sizes of shoes sold at a shop in one day.

5, 9, 8, 7, 10, 5, 7, 6, 7, 1, 6, 2, 3, 4

Solution :

सर्वप्रथम सुविधा की दृष्टि से इन्हें क्रमबद्ध कर लेंगे :

First of all we will sort them out of convenience–

1, 2, 3, 4, 5, 5, 6, 6, 7, 7, 7, 8, 9, 10

उपर्युक्त समंको से स्पष्ट है कि मूल्य 7 सर्वाधिक है अर्थात 3 बार आया है

From the observation the frequency of 7 = 3 (times).

अतः/hence, बहुलक Z = 7

Ex.: निम्न समंको से बहुलक (Mode) की गणना कीजिए?

Calculate Mode from the following data :

वेतन (Salary) रु. :	**200**	**225**	**250**	**275**	**300**	**325**
आवृत्ति (f) :	**4**	**6**	**12**	**18**	**7**	**3**

सबसे अधिक आवृत्ति मूल्य (वेतन) 275 की 18 है।

Maximum frequency = 275 (18 times)

∴ मोड Mode (Z) = 275.

सतत् या अविच्छिन्न श्रेणी (Continuous Series) :

$$Z = l_1 + \frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \times h$$

Z = बहुलक का मूल्य/ Mode

l_1 = बहुलक की नीचली सीमा/ Lower limit

f_1 = बहुलक वर्ग की आवृत्ति/ Frequency of mode class

f_0 = बहुलक वर्ग के ठीक पहले की आवृत्ति/Frequency immediately preceding from mode class

f_2 = बहुलक वर्ग के ठीक बाद की आवृत्ति/ Frequency immediately following mode class

h = वर्गान्तर/Interval

Ex.: निम्न समंक माला से बहुलक (Mode) ज्ञात करें :

Find the mode from the given observation :

प्राप्तांक (Score) :	**0-10**	**10-20**	**20-30**	**3040**	**40-50**
विद्यार्थियों की संख्या (No. of students) :	**5**	**7**	**15**	**25**	**8**

Solution :

बहुलक की गणना–

प्राप्तांक (Marks) विद्यार्थियों की संख्या (No of students)

Score	No. of students (f)
0-10	5
10-20	7
20-30	15 → f_0
30-40	25 → f_1
40-50	8 → f_2

$$Z = l_1 + \frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \times h$$

$$\Rightarrow \quad Z = 30 + \frac{25-15}{(2\times25-15-8)} \times 10$$

$$\Rightarrow \quad Z = 30 + \frac{10}{50-23} \times 10$$

$$Z = 30 + \frac{10}{27} \times 10 \Rightarrow 30 + \frac{100}{27}$$

$$= 30 + 3.70$$

$$= 33.70$$

अनुभवजन्य सम्बन्ध माध्य माध्यिका और बहुलक (Empirical Relation between Mean, Median and Mode)

बहुलक = 3 (माध्यिका) - 2 (माध्य)

Mode = 3 (Median) – 2 (Mean)

Ex. : माध्य = 12, माध्यिका = 16.5, बहुलक = ?

Mean = 12, Median = 16.5, Mode = ?

Sol. Mode = 3 Median - 2 mean

Mode = 3 × 16.5 - 2 × 12

Mode = 49.5 - 24 = 25.5

Ex. : बहुलक = 16, माध्यिका = 21, माध्य = ?,

Mode = 16, Median = 21, Mean = ?

Sol. Mode = 3 Median - 2 mean

16 = 3 × 21 - 2 mean

$$\text{Mean} = \frac{63-16}{2}$$

$$\text{Mean} = \frac{47}{2} = 23.5$$

Ex. : माध्य = 20, बहुलक = 18 , माध्यिका = ?

Mean = 20, Mode = 18, Median = ?

Sol. Mean-Mode = 3 (Mean-Median)

20-18 = 3 (20 – median)

2 = 60 – 3 median

3 median = 60-2

$$\text{median} = \frac{58}{3} = 19.33$$

विभाजन मूल्य (Partition Value)

व्यक्तिगत श्रेणी में प्रथम (Q_1) और तृतीय चतुर्थक (Q_3) की गणना (Calculation of Q_1 and Q_3 in Individual series)–इस श्रेणी में सर्वप्रथम पदों को आरोही क्रम में व्यवस्थित कर लिया जाता है तब/then,

In this series first of all the terms are arranged in ascending order.

$$Q_1 = \frac{(N+1)}{4} \text{ वा पद} \qquad Q_3 = \frac{3(N+1)}{4}$$

प्रश्न: निम्न समंको में प्रथम एवं तृतीय चतुर्थक (First & Third Quartiles) की गणना करों?

18, 24, 21, 19, 23, 25, 20

Solve :

आरोही क्रम में लगाने पर (In ascending order),

18, 19, 20 21 23 24 25

N = 7

$$Q_1 \Rightarrow \left(\frac{N+1}{4}\right) \text{वाँ पद} \Rightarrow \frac{7+1}{4} \text{ वाँ पद}$$

$$= \frac{8}{4} = 2 \text{ वाँ पद}$$

दूसरा पद $Q_1 = \underline{\underline{19}}$

$$Q_3 \Rightarrow \frac{3(N+1)}{4} \text{वाँ पद} \Rightarrow \frac{3(7+1)}{4} \text{वाँ पद}$$

$$\Rightarrow \frac{3\times 8}{4} \Rightarrow 6 \text{ वाँ पद}$$

$Q_3 = 6$ वाँ पद $= \underline{\underline{24}}$

प्रश्न: निम्न समंको से Q_1 and Q_3 की गणना कीजिये?

Find Q_1 and Q_3 from following observations

<u>6</u>, <u>9</u>, <u>12</u>, <u>8</u>, <u>14</u>, <u>13</u>, <u>10</u>, <u>8</u>, <u>11</u>

Solution : आरोही क्रम में लगाने पर (in ascending order)–

6, 8, 8 9 10 11 12 13 14

N = 9 पद

$$Q_, \text{ No } = \left(\frac{N+1}{4}\right) \text{ वाँ पद}$$

$$Q_1 (N) \Rightarrow \frac{(9+1)}{4}$$

$$= \frac{10}{4} = 2.50 \text{ वाँ पद}$$

2.5th वाँ पद = दूसरा पद + 0.5 (तीसरा - दूसरा)

$$= 8 + 0.5(8-8)$$

$$= 8$$

$Q_1 = \underline{\underline{8}}$ Ans.

$$Q_3 = \frac{3(N+1)}{4} \text{ वाँ पद}$$

$$= \frac{3}{4}(9+1) \Rightarrow \frac{3\ (10)}{4}$$

$$= 3 \times 2.5$$

$$= 7.5 \text{वाँ पद}$$

7.5वाँ पद $(Q_3) = 7$वाँ पद $+ 0.5$ (8वाँ पद - 7वाँ पद)

$$= 12 + 0.5 \quad (13-12)$$

$$\Rightarrow 12 + 0.5 \times 1$$

$Q_3 \Rightarrow \underline{\underline{12.5}}$ Ans.

सतत श्रेणी में Q_1 & Q_3 की गणना–

$$Q_1 = \ell + \frac{\left(\frac{1}{4}N - F\right)}{f} h$$

$$Q_3 = \ell + \frac{\left(\frac{3}{4}N - F\right)}{f} h$$

Where : ℓ = lower limit of the Quartiles class

N = Total frequency.

F = C.f. of the class preced the quartile class

f = frequency of the quartile class

h = internal of the quartile class

प्रश्न : निम्न समंक्रमाला से Q_1 तथा Q_3 की गणना कीजिए?

Find the Q_1 and Q_3 from the following observations.

वर्गान्तर (Interval) : 0-10 10-20 20-30 30-40 40-50

आवृत्ति (f) : 8 20 35 17 10

Solve :

वर्गान्तर	आवृत्ति (f)	संचयी आवृत्ति (c.f.)
0-10	8	8
Q_1 10-20	20	28
20-30	35	63
Q_3 30-40	17	80
40-45	10	90
		N=90

$$Q_1 = \frac{90}{4} = 22.50 \quad \left(\because \ \frac{1}{4}N = \frac{90}{4} = 22.50\right)$$

$$Q_1 = \ell + \frac{\frac{1}{4}N - F}{f} h$$

$$= 10 + \frac{\frac{90}{4} - 8}{20} \times 10$$

$$\Rightarrow 10+\left(\frac{90-32}{2\times 4}\right)$$

$$\Rightarrow 10+\frac{58}{2\times 4}$$

$$\Rightarrow 10+\frac{58}{8}$$

$$\Rightarrow 10+7.25$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{17.25}}\ \text{Ans.}$$

$$Q_3=\ell+\frac{\frac{3}{4}N-F}{f}\times h, \qquad \because \frac{3N}{4}\Rightarrow 3\times\frac{90}{4} = 67.5$$

$$Q_3=30+\frac{\frac{3}{4}\times 90-63}{17}\times 10$$

$$Q_3=30+\frac{270-252}{17\times 4}\times 10$$

$$Q_3=30+\frac{18}{17\times 4}\times 10 \qquad =30+\frac{9}{17}\times 5$$

$$\Rightarrow \quad 30+\frac{45}{17}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{32.65}\ \text{Ans.}$$

दशमक (Deciles)**–**दशमक (d) से आशय उन मूल्यों से होता है जो समंकमाला को दस समान भागों में विभाजित कर देते है।

स्पष्टतः कुल मिलाकर नौ दशमक होते है। इनमें से D_5 माध्यिका के बराबर होता है।

Deciles are values that divides a set of observations into 10 equal parts.

Hence, there are 9 deciles in total of these. D5 is equal to the median

इस श्रेणी में सर्वप्रथम पदों को आरोही क्रम में व्यवस्थित कर लिया जाता है

In this series first of all the terms are arranged in ascending order.

तब/then,

$$D_1=\frac{1}{10}\times(N+1)$$

$$D_2=\frac{2}{10}\times(N+1)$$

$$D_3=\frac{3}{10}\times(N+1)$$

इसी प्रकार/similarly

$$D_9=\frac{9}{10}\times(N+1)$$

सतत् श्रेणी में/In continuous series-

$$D_1=l+\frac{\left(\frac{N}{10}-F\right)}{f}\times h$$

$$D_2=l+\frac{\left(\frac{2N}{10}-F\right)}{f}\times h$$

इसी प्रकार अन्य/Similarly others-

शतमक (Percentiles)– शतमक (P) वे मूल्य होते है, जो समंकमाला को सौ बराबर के भागों में विभाजित कर देते है।

स्पष्टतः कुल मिलाकर 99 शतमक (1, 2, 3........99) होते है इसमें 50 वाँ शतमक माध्यिका ही होता है।

"Percentiles are values that divide a set of observed into 100 equal parts."

Hence, there are 99 percentile (1, 2, 3, ...99). 50^{th} is equal to the median.

व्यतिगत श्रेणी तथा खण्डित श्रेणी में (Individual & discrete series)**–**

इस श्रेणी में सर्वप्रथम पदों को आरोही क्रम में व्यवस्थित कर लिया जाता है

In this series first of all the terms are arranged in ascending order.

तब/then,

$$P_1=\frac{1}{100}\times(N+1)$$

$$P_2=\frac{2}{100}\times(N+1)$$

$$P_3=\frac{3}{100}\times(N+1)$$

इसी प्रकार/Similarly

$$P_{99}=\frac{99}{100}\times(N+1)$$

सतत् श्रेणी में (Continuous series) :

$$P_1=l+\frac{\frac{N}{100}-F}{f}\times h \qquad P_2=l+\frac{\frac{2N}{100}-F}{f}\times h$$

$$P_3=l+\frac{\frac{3N}{100}-F}{f}\times h$$

इसी प्रकार/Similarly

$$P_{99}=l+\frac{\frac{99N}{100}-F}{f}\times h$$

25 अपकिरण की माप
(Measurement of Dispersion)

अपकिरण (विक्षेपण) (Dispersion)– अपकिरण का शाब्दिक अर्थ 'बिखराव' या 'फैलाव' (Scatteredness) है अपकिरण का प्रयोग दो अर्थो में किया जाता है।

The literal meaning of dispersal is 'scattering' or 'scatteredness'. Dispersion is used in two meanings.

(A) प्रथम अर्थ–अपकिरण से तात्पर्य पद श्रेणी के सीमान्त पदों के विस्तार या सीमा विस्तार से है अर्थात अपकिरण उन सीमाओं के अन्तर को प्रकट करता है जिसके अन्तर्गत श्रेणी के पद पाए जाते है।

First meaning– Dispersion means the expansion or expansion of the limits of the marginal terms of a category, that is, dispersion reveals the difference in the limits within which the terms of the category are found.

(B) दूसरा अर्थ–अपकिरण से तात्पर्य पदमाला के माध्य से लिए गये विचलनों का माध्य है।

Second meaning– Dispersion means the mean of deviations taken from the mean of the series.

प्रसरण (Variance)

प्रसरण भी प्रमाप विचलन पर आधारित मान है। सामान्य भाषा में प्रसरण का अर्थ प्रमाप विचलन के वर्ग (Square of standard Deviation) से होता है अर्थात्

Variance is also a value based on standard deviation. In common language, variance means the square of standard deviation i.e.

$$\text{Variance }(V) = (\text{Sd})^2$$

$$\text{SD} = \sqrt{\text{Variance}}$$

➢ प्रसरण को द्वितीय अपकिरण घात भी कहते है।

Variance is also called second moment of dispersion.

➢ यदि किसी समंकमाला से प्रसरण की गणना करनी हो तो वर्गमूल का प्रयोग किए बिना प्रमाप विचलन के सूत्र का प्रयोग किया जाता है।

If variance has to be calculated from a data series, then the formula for standard deviation is used without using the square root.

☞ माध्य विचलन को 'औसत विचलन' अथवा 'प्रथम अपकिरण घात कहा जाता है।

Mean deviation is called average deviation or first moment of dispersion.

Variance : The square of the standard deviation is called the variance and may be denoted by σ^2.

$$V = (\text{Sd})^2$$

$$V = \sigma^2$$

$$\sigma = \sqrt{\text{Variance}}$$

$$\text{Coefficient of variance} = \frac{\sigma}{m} \times 100$$

अपकिरण मापने की रीतियाँ
(Measures of Dispersion)

अपकिरण मापने की मुख्य रीतियाँ निम्न प्रकार है :

The main methods of measuring dispersion are as follow :

(A) सीमा रीति अथवा अपकिरण की स्थिति माप :

Methods of limits or positional measures of Dispersion :

(1) विस्तार/ Range

(2) अन्तर चतुर्थक विस्तार/ Inter Quartile Range

(3) शतमक विस्तार/ Percentile Range

(B) माध्य विचलन रीति अथवा अपकिरण की गणना माप :

Methods of mean deviations or calculation measures of dispersion

(4) चतुर्थक विचलन/ Quartile deviation

(5) माध्य विचलन/ Mean Deviation

(6) प्रमाप विचलन/ Standard Deviation

(7) अन्य माप/ Other measures

(C) बिन्दुरेखीय रीति/ Graphic method

(8) लॉरेंज वक्र/ Lorenz curve

TEAM SPY

विस्तार (Range)

यह अपकिरण की सबसे सरल माप है परिभाषा के रूप में,"विस्तार का आशय किसी समंकमाला के सीमान्त मूल्यों के अन्तर से है" अर्थात किसी समंकमाला के सबसे बड़े और सबसे छोटे मूल्य के अन्तर को विस्तार कहते है।

This is the simplest measure of dispersion. As a definition, "expansion means the difference between the limiting values of a data series", that is, the difference between the largest and smallest value of a data series is called expansion.

$$\boxed{\text{Range} = X\max - X\min}$$

अथवा

$$\boxed{R = L - S}$$

$$\left[\begin{array}{l} \because X\max = L = \text{Largest value in the series} \\ X\min = S = \text{Smallest value in the series} \end{array}\right]$$

विस्तार के सापेक्ष माप/ Measurement relative to range :

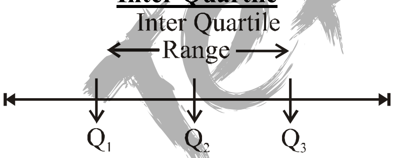
अर्थात $\boxed{\text{Coefficient of Range} = \dfrac{L-S}{L+S}}$

अन्तर चतुर्थक विस्तार (Inter-Quartile Range)

अन्तर चतुर्थक की गणना समंकमाला के प्रथम चतुर्थक (Q_1) तथा तृतीय चतुर्थक Q_3 के आधार पर की जाती है।

Inter quartile is calculated on the basis of first quartile (Q_1) of third Quartile (Q_3) of the data series

Inter Quartile



$$\boxed{\text{I.Q. Range} = Q_3 - Q_1}$$

शतमक विस्तार (Percentile Range)

अपकिरण ज्ञात करने के लिये शतमक विस्तार का भी प्रयोग किया जा सकता है।

Percentile range can also be used to determine dispersion.

इसके लिए सर्वप्रथम 90वाँ शतमक (P_{90}) तथा 10वाँ शतमक (P_{10}) की गणना की जाती है।

For this, first of all 90^{th} percentile (P_{90}) and 10^{th} percentile (P_{10}) are calculated

इसके पश्चात सूत्र प्रयोग करते है।

After this the formula is used

$\boxed{PR = P_{90} - P_{10}}$ PR $\Rightarrow$ Percentile Range

(1) गणना की दृष्टि से दशमक विस्तार को लिखा जा सकता है।

From the point of view of calculation, decimal expansion can be writer as

$$\boxed{DR = D_9 - D_1}$$

(2) शतमक विस्तार सबसे अच्छा माना जाता है। (अन्य विस्तारों से) क्योंकि

Percentile range (expansion) is considered as the best (from other expansion) because–

(i) यह विस्तार समंकमाला के चरम (Exterme) मूल्यों से प्रभावित नहीं होता।

This range is not affected by the extreme value of data series

(ii) यह श्रेणी के मध्य के 80% मूल्यों पर आधारित होता है।

It is based on the middle 80% value of the range.

प्रश्न : निम्न समंको से अन्तर-चतुर्थक विस्तार तथा शतमक विस्तार की गणना कीजिए?

Find the inter-quartile range and percentile range from the following observtions.

Salary (Less than) : 10 20 30 40 50 60 70

No. of workers : 5 8 15 20 30 33 35

Solution :

	Class Internal	f	cf
P_{10}	0-10	5	5
	10-20	3	8
Q_1	20-30	7	15
	30-40	5	20
Q_3	40-50	10	30
P_{90}	50-60	3	33
	60-70	2	35

$$Q_1 \text{ No} = \frac{35}{4}$$

$$= 8.75$$

$$Q_1 = l + \frac{\frac{N}{4} - F}{f} \times h$$

$$Q_1 = 20 + \frac{\frac{35}{4} - 8}{7} \times 10$$

$$= 20 + \frac{8.75 - 8}{7} \times 10$$

$$= 20 + \frac{0.75}{7} \times 10$$

$$Q_1 = 20 + 1.07$$

$$\boxed{Q_1 = 21.07}$$

Q_3 No $= \frac{3}{4}(35) \Rightarrow 26.25$

$$Q_3 = l + \frac{\frac{3}{4}N - F}{f} \times h$$

$$= 40 + \frac{\frac{3}{4} \times 35 - 20}{10} \times 10$$

$$= 40 + 3 \times 8.75 - 20$$

$$= 40 + 26.25 - 20$$

$$= 40 + 6.25$$

$$= 46.25$$

Inter Quartile Range $= Q_3 - Q_1$

IQ Range $= Q_3 - Q_1$

$= 46.25 - 21.07$

IQ Range = 25.18 Ans.

P_{10} No $= \frac{10 \times 35}{100} = 3.5^{th}$

$$P_{10} = l + \frac{\frac{10}{100}N - F}{f} \times h$$

$$= 0 + \frac{\left(\frac{10}{100} \times 35 - 0\right)}{5} \times 10$$

$$= \frac{3.5}{5} \times 10 = 7$$

$$P_{90} = \frac{90}{100} \times 35$$

$$= \frac{315}{10} \Rightarrow 31.5$$

$$P_{90} = \ell + \frac{\frac{90N}{100} - F}{f} \times h$$

$$= 50 + \frac{\frac{90}{100} \times 35 - 30}{3} \times 10$$

$$= 50 + \frac{31.5 - 30}{3} \times 10$$

$$= 50 + \frac{1.5}{3} \times 10$$

$$= 50 + 5$$

$$P_{90} = 55$$

Percentile Range (PR) $= P_{90} - P_{10}$

$= 55 - 7$

$= 48$

PR = 48

चतुर्थक विचलन (Quartile Deviation)

विस्तार माप की रीति में सीमान्त पदों (Extreme value) को ही महत्व दिया जाता है इस कमी को दूर करने के लिए चतुर्थक विचलन विकसित किया।

In the method of measuring range (expansion), Importance given to only extreme values. To overcome shortcoming quartile deviation was developed

चतुर्थक विचलन को स्पष्ट करते हुए मिल्स ने कहा चतुर्थक विचलन दोनो चतुर्थकों के परस्पर विस्तार का अर्धक है।

Explaining the quartile deviation, Mills said that the quartile deviation is half of the mutual expansion of the two quartiles

$$\text{Quartile deviation (Q.D.)} = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$$

$$\text{Coefficient of Q.D.} = \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}$$

Ex.: For a symmetric distribution $Q_1 = 20$ and $Q_3 = 40$ The median of the data is

सममितिक बंटन के लिए $Q_1 = 20$ और $Q_3 = 40$ आँकड़ों की माध्यिका बताइए।

(a) 30 (b) 20

(c) 10 (d) 40

Ans : (a) सममित बंटन में Median

$$= \frac{Q_3 + Q_1}{2}$$

$$= \frac{40 + 20}{2}$$

$$= \frac{60}{2} = 30$$

Ex.: The first, second and third quantities of a frequency distribution are 10, 25 and 40 respectively. The quartile deviation given by–

एक बारंबारता बंटन की प्रथम द्वितीय और तृतीय मात्राएँ क्रमशः 10, 25 और 40 हैं। मात्रा विचलन निम्नलिखित में से क्या होगा?

(a) 8.75 (b) 25

(c) $\frac{3}{5}$ (d) 1.25

Ans : (c) Quartile Deviation $= \frac{Q_3 - Q_1}{2}$

Co-efficient of Quartile Deviation

$$= \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}$$

$$\Rightarrow \frac{40 - 10}{40 + 10} = \frac{30}{50}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{5}$$

TEAM SPY

माध्य विचलन (Mean deviation)

माध्य विचलन को 'औसत विचलन' अथवा 'प्रथम अपकिरण व्यात' भी कहा जाता है।

Mean deviation is also called 'average deviation or first moment of dispersion.

माध्य विचलन से आशय समंकमाला में केन्द्रीय प्रवृत्ति के किसी माप अथवा किसी भी सांख्यिकीय माध्य (समान्तर माध्य, माध्यिका अथवा बहुलक) से निकाले गये विभिन्न मूल्यों के विचलनों के समान्तर माध्य से है।

Mean deviation means the mean of deviation of values extracted from any measure of central tendency in the data series or any statistical mean (mean, median or mode)

विचलन लेते समय धन (+) या ऋण (-) के गणितीय चिन्हों को छोड़ दिया जाता है।

The mathematical signs of plus (+) or minus(–) are neglected while taking deviation.

मिल्स के अनुसार, "किसी पदमाला का समान्तर माध्य या माध्यिका से लिए गये विचलनों के औसत को माध्य विचलन कहते है।"

According to Mills, "The average of the deviations taken from the arithmetic mean or median of a series is called mean deviation."

$$\boxed{MD = \frac{1}{N}\Sigma\left|f_i\,x_i - m\right|}$$

$$\text{Coefficient of } MD = \frac{MD}{\overline{X}}$$

Ex.: निम्न कीमतों के लिए समान्तर माध्य से विचलन एवं इसका गुणांक ज्ञात करें?

Calculate mean deviation & its coefficient from mean for the following prices :

210, 220, 225, 225, 225, 235, 240, 250, 270, 280

Solution :

मूल्य Price (X)	माध्य से विचलन Mean deviation |dx|
210	|210-238| = 28
220	|220-238| = 18
225	|225-238| = 13
225	|225-238| = 13
225	|225-238| = 13
235	|235-238| = 3
240	|240-238| = 2
250	|250-238| = 12
270	|270-238| = 32
280	|280-238| = 42
N=10, Σx=2380	Σdx=176

$$\overline{X} = \frac{\Sigma x}{N} = \frac{2380}{10} = 238 \qquad \text{Mean deviation} = \frac{176}{10}$$

$$\boxed{MD = 17.6}$$

$$\text{Coefficient of } MD = \frac{MD}{\overline{X}} = \frac{17.6}{238} = 0.074 \text{ Ans.}$$

Ex.: निम्नलिखित मानों का विचलन परिकलित कीजिए तथा विचलन गुणांक ज्ञात कीजिए?

Calculate the deviation of the following values and find the coefficient of deviation.

2, 4, 7, 8 9

Solve :

X	|dx|
2	|2-6|=4
4	|4-6|=2
7	|7-6|=1
8	|8-6| = 2
9	|9-6| = 3
Σx=30	Σdx=12

$$\text{मानक विचलन (MD)} = \frac{\Sigma dx}{N} = \frac{12}{5} = 2.40 \text{ Ans.}$$

विचलन गुणांक

N = 5 Coefficient of MD

$$\overline{X} = \frac{\Sigma x}{N} = \frac{30}{5} = 6 \qquad = \frac{MD}{\overline{x}} = \frac{2.40}{6} = 0.4 \text{ Ans.}$$

कल्पित माध्य विधि/लघु रीति विधि :

Assumed Mean method/Short trick method :

$$\boxed{Mdx = \frac{\Sigma dx + \left(\overline{X} - A\overline{X}\right)\left(\Sigma fb - \Sigma fa\right)}{n}}$$

जहाँ Σdx =कल्पित माध्य से लिए गये निरपेक्ष विचलनों का योग है।/ Sum of absolute deviation taken from the assumed mean

$\overline{X}$ = वास्तविक माध्य है।/ Real mean

$A\overline{X}$ = काल्पित माध्य है जो विचलनों के परिकलन में प्रयुक्त है।/ Assumed mean which is used to calculate deviation

Σfb = वास्तविक माध्य तथा उससे नीचे के मानों की संख्या।/ Number of values below the true mean

Σfa = वास्तविक माध्य से ऊपर के मानो की संख्या।/ Number of values above the true mean

माना कल्पित माध्य = 7

Let assumed mean = 7

X	|dx|(7) से
2	|2-7|=5
4	|4-7|=3
7	|7-7|=0
8	|8-7| = 1
9	|9-7| = 2
Σx=30	Σdx=11

$$N=5 \qquad MD=\frac{\sum dx+\left(\overline{X}-A\overline{X}\right)(\sum fb-\sum fa)}{n}$$

$$\overline{X}=\frac{\sum x}{5} \qquad =\frac{11+(6-7)(2-3)}{5}$$

$$\overline{X}=\frac{30}{5}=6 \qquad =\frac{11+(-1\times-1)}{5}$$

$$=\frac{11+1}{5}=\frac{12}{5}=2.4$$

Note : माध्य विचलन कल्पित विधि से परिकलित विचलनों द्वारा भी निकाला जा सकता है यह विधि विशेष रूप से तब अपनायी जाती है जब वास्तविक माध्य भिन्नात्मक संख्या में होता है (यह ध्यान रहे कल्पित माध्य वास्तविक माध्य के निकट हो।)

The mean deviation can also be determined by the deviations calculated using the assumed method. This method especially adopted when the actual mean is in fractional number (keep in mind that the assumed mean should be close to the actual mean.)

Ex.: निम्न समंकों से माध्य के आधार पर माध्य विचलन और माध्य विचलन गुणांक ज्ञात कीजिये।

Calculate the mean Deviation from the mean and coefficient of mean Deviation of the following distribution :

X	**:**	**10**	**15**	**20**	**30**	**40**	**50**
f	**:**	**8**	**12**	**15**	**10**	**3**	**2**

Solution :

X	f	fx	d $\overline{X}$	fdx
10	8	80	|10-21.6|=11.6	92.8
15	12	180	6.6	79.2
20	15	300	1.6	24.0
30	10	300	8.4	84.0
40	3	120	18.4	55.2
50	2	100	28.4	56.8
	N=50	Σfx=1080		392.00

$$\overline{X}=\frac{\sum fx}{N}=\frac{1080}{50}=\underline{\underline{21.6}}$$

$$MD=\frac{\sum fdx}{N}=\frac{392}{50}=\underline{\underline{7.84}}$$

$$\text{Coefficient of MD}=\frac{MD}{Mean}=\frac{7.84}{21.6}$$

$$=\underline{\underline{0.362}}\ \underline{\underline{Ans.}}$$

Ex.: 3, 4, 5, 6, 7 संख्याओं का माध्य विचलन क्या होगा?

Mean deviation of numbers 3, 4, 5, 6, 7 is–

(a) 1 (b) 1.2

(c) 5 (d) 25

Ans : (b)

x	deviation from mean (5)
3	2
4	1
5	0
6	1
7	2
	6

$$\textbf{Mean deviation}=\frac{\sum d}{n}$$

$$\Rightarrow\frac{6}{5}\Rightarrow 1.2$$

प्रमाप अथवा मानक विचलन
(Standard Deviation)

''प्रमाप अथवा मानक विचलन का आशय किसी समंकमाला में माध्य से लिये गये विचलनों के वर्गो के समान्तर माध्य के वर्गमूल से है।''

Standard deviation means the square root of the arithmetic mean of the squares of the deviations taken from the mean in a data series.

वास्तविक माध्य विधि (Real mean method)–

$$SD(\sigma)=\sqrt{\frac{\sum d^2}{N}}$$

$$SD(\sigma)=\sqrt{\frac{\sum fd^2}{N}}$$

कल्पित माध्य विधि/Assumed mean method-

$$SD(\sigma)=\sqrt{\frac{\sum d^2x}{N}-\left(\frac{\sum dx}{N}\right)^2}$$

TEAM SPY

प्रत्यक्ष विधि/Direct method-

$$SD(\sigma)=\sqrt{\frac{\sum x^2}{N}-\left(\frac{\sum x}{N}\right)^2}$$

$$SD(\sigma)=\sqrt{\frac{\sum x^2}{N}-\left(\bar{X}\right)^2}$$

Ex. : 5, 10, 25, 30 50 का मानक विचलन ज्ञात करों

Calculate the standard deviation values are 5, 10, 25, 30, 50?

Solve : (1)st method

वास्तविक माध्य विधि

Real mean method

X	d(x- $\bar{X}$)	d^2
5	-19	361
10	-14	196
25	+1	1
30	+6	36
50	+26	676
N=5,	Σx=120	1270

$\bar{X}=\frac{120}{5}=24$

$\sigma=\sqrt{\frac{d^2}{n}}$

$\sigma=\sqrt{\frac{1270}{5}}$

$\sigma=\sqrt{254}=15.937$

IInd (Method)

कल्पित माध्य विधि द्वारा

By assumed mean method

X	d(x- A)	d^2
5	-20	400
10	-15	225
25	0	0
30	5	25
50	25	625
N=5	Σd=-5	Σd^2 = 1275

माना कल्पित माध्य (a) = 25

Assumed value

$$\sigma=\sqrt{\frac{\sum d^2}{N}-\left(\frac{\sum d}{n}\right)^2}$$

$$\sigma=\sqrt{\frac{1275}{5}-\left(\frac{-5}{5}\right)^2}$$

$$\sigma=\sqrt{255-1}$$

$$\sigma=\sqrt{254}$$

$= 15.937$ Ans.

प्रत्यक्ष विधि/Direct method :

X	X^2
5	25
10	100
25	625
30	900
50	2500
120	4150

विचलन शून्य से लिए गये माने जा सकते (यहाँ है।/Here the deviation can be considered to be taken from zero)

N = 5

$$\sigma=\sqrt{\frac{\sum x^2}{N}-\left(\frac{X}{N}\right)^2}$$

$$\sigma=\sqrt{\frac{4150}{5}-\left(\frac{120}{5}\right)^2}$$

$$\sigma=\sqrt{830-576}$$

$$\sigma=\sqrt{830-576}$$

$$\sigma=\sqrt{254}$$

$\boxed{\sigma=15.937}$ Ans.

पद विचलन विधि/Step deviation method :

$$\sigma=\sqrt{\frac{\sum fd^2}{N}}$$

Ex.: निम्न समंकों से प्रमाप विचलन की गणना करों?

Calculate standard deviation of the following data :

Size :	6	7	8	9	10	11	12
frequency :	3	6	9	13	8	5	4

TeamSPY

Solution :

वास्तविक माध्य विधि

Real mean method

x	f	fx	d = (x- $\overline{X}$)	d^2	fd^2
6	3	18	-3	9	27
7	6	42	-2	4	24
8	9	72	-1	1	9
9	13	117	0	0	0
10	8	80	+1	1	8
11	5	55	+2	4	20
12	4	48	+3	9	36
	N=48	Σfx=432			Σfd^2=124

$\overline{X} = \frac{\sum fx}{N} = \frac{432}{48}$

$= 9$

$\sigma = \sqrt{\frac{\sum fd^2}{N}} = \sqrt{\frac{124}{48}} = \sqrt{2.58}$

$= 1.606$

$= 1.61$

कल्पित माध्य विधि द्वारा : A = कल्पित माध्य माना A = 8

By assumed mean method: A = Assumed mean

A = 8

X	f	d = (x-A)	fd	d^2	fd^2
6	3	-2	-6	4	12
7	6	-1	-6	1	6
8	9	0	0	0	0
9	13	+1	13	1	13
10	8	+2	16	4	32
11	5	+3	15	9	45
12	4	+4	16	16	64
	n = 48		Σfd = 48		Σfd^2=172

$\sigma = \sqrt{\frac{\sum fd^2}{N} - \left(\frac{fd}{N}\right)^2}$

$= \sqrt{\frac{172}{48} - \frac{48}{48}^2}$

$= \sqrt{3.58 - 1}$

$= \sqrt{2.58}$

$= 1.61$

प्रत्यक्ष विधि/ Direct method :

X	f	fx	fx^2
6	3	18	3×36=108
7	6	42	6×49=294
8	9	72	9×64=576
9	13	117	13×81=1053
10	8	80	100×8=800
11	5	55	121×5=605
12	4	48	144×4=576
	N=48	Σfx = 432	Σfx^2 = 4012

$\sigma = \sqrt{\frac{\sum fx^2}{N} - \left(\frac{\sum fx}{N}\right)^2}$

$\sigma = \sqrt{\frac{4012}{48} - \left(\frac{432}{48}\right)^2}$

$= \sqrt{83.50 - (9)^2} = \sqrt{83.58 - 81}$

$= \sqrt{2.58}$

$= 1.606$

$= 1.61$

Ex.: In a distribution, $n = 10, \sum x = 60, \sum x^2 = 1000$ then standard deviation is

बंटन में $n = 10, \sum x = 60, \sum x^2 = 1000$ तो मानक विचलन क्या होगा?

(a) 64 (b) 8

(c) 36 (d) 6

Ans : (b) $SD = \sqrt{\frac{\sum x^2}{N} - (\overline{X})^2}$

$\overline{X} = \frac{\sum x}{n} = \frac{60}{10} = 6$

$S.D = \sqrt{\frac{1000}{10} - (6)^2} = \sqrt{100 - 36} = \sqrt{64} = 8$

अपकिरण की मापों का सम्बन्ध
(Relation between Measures of Dispersion)

सामान्य वितरण (Normal Distribution) अथवा साधारण रूप से असममित (Moderately Asymmetrical) बंटनों में चतुर्थक विचलन (Q.D.) माध्य विचलन (M.D.) और प्रमाप विचलन (S.D.) के माध्य एक निश्चित सम्बन्ध पाया जाता है, जो निम्न प्रकार है–

Normal Distribution or moderately asymmetric distributions, a certain relationship is found among quartile deviation (Q.D), mean deviation (M.D) and standard deviation (SD) which is as follows :

➢ QD : SD = 2 : 3
➢ MD : SD = 4 : 5
➢ QD : MD : SD = 10 : 12 : 15

TEAM SPY

26 क्रमचय और संचय (Permutation & Combination)

क्रमचय और संचय/Permutation & Combination

क्रमचय एवं संचय का प्रयोग हम किसी दी हुई वस्तुओं में से एक समय में कुछ अथवा सभी को लेकर उनका चयन किस प्रकार किया जाता है, यह ज्ञात करते है।

By using permutation and combination we find out how some or all of the given items are selected at a time.

"यदि कोई कार्य (क्रिया) भिन्न-भिन्न p तरीकों से किया जा सकता है तथा दूसरा कार्य (क्रिया) भिन्न-भिन्न q तरीकों से किया जा सकता है तो उन दोनों कार्यो को करने के कुल तरीके $p \times q$ होगे।"

"If one action or work can be done in 'p' different ways and second action or work can be done in 'q' different ways, then the total ways of doing both those works will be $p \times q$.

क्रमचय (Permutation)

क्रमचय = क्रम + चयन (क्रमयुक्त चयन)

Permutation = order + selection (ordered selection)

यदि वस्तुओं के चयन में उनके क्रम पर भी ध्यान दिया जाए तो चयन का प्रत्येक ढंग क्रमचय कहलाता है।

If the order of items is also kept in mind while selecting them, then each method of selection is called permutation.

अर्थात्/Hence,

"दी हुयी वस्तुओं में से कुछ अथवा सभी को एक साथ लेकर उन्हें जितने भिन्न-भिन्न क्रमों में रखा जा सकता है, उनमें से प्रत्येक क्रम को क्रमचय (Permutation) कहते है।

Each of the different arrangements which can be made by taking some or all of a number of distinct objects is called permutation.

Example : तीन वस्तुओं A, B, C में से दो–दो वस्तुओ को निम्नलिखित क्रमों में रखा जा सकता है

Out of 3 objects (A, B, C) taking 2 at a time total arrangements

स्पष्ट है कि 3 में से 2 वस्तुओं को एक साथ लेकर 6 भिन्न-भिन्न क्रमों में रखा जा सकता है। अतः क्रमचयो की संख्या 6 है।

It is clear that taking 2 out of there objects together there are 6 different arrangements can be placed in sequences. Hence the total number of permutation is 6.

(AB, BA) (AC, CA) (BC,CB)

गणितीय रुप में विश्लेषण/ Analysis in mathematical form : n भिन्न-भिन्न वस्तुओं में से r वस्तुओं को एक साथ लेने पर प्राप्त क्रमचयों की कुल संख्या को प्रतीक ^np_r अथवा P(n, r) से प्रदर्शित किया जाता है।

The total number of permutation obtained by taking 'r' objects together out of 'n' different objects is represented by the symbol ^np_r or P(n, r)

$$^nP_r = P(n,r)$$

$$^nP_r = n(n-1)(n-2) \text{......r गुणनखण्डों तक/to r factors}$$

$$\boxed{^nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}}$$

☞ **n! का अर्थ. (Meaning of n!)–** 1 से लेकर n तक की सभी प्राकृतिक संख्याओं अथवा धन पूर्ण संख्याओं के लगातार गुणनफल को प्रतीक n! या $\underline{|n}$ द्वारा व्यक्त किया जाता है जिसे 'क्रमगुणित n' (Factorial n) पढ़ा जाता है।

The consecutive product of all natural numbers or positive integers from 1 to n is symbolized as n! or $\underline{|n}$ which is read as 'Factorial n'

$$n! = n(n-1)(n-2)\text{.................}3.\ 2.\ 1$$

$$(n-1)! = (n-1)(n-2)\text{...................}3.\ 2.\ 1$$

$$n! = n(n-1)!$$

$$= n(n-1)(n-2)(n-3)\text{.............}3\times 2\times 1$$

Example : $\underline{|9} = 9\times 8\times 7\times 6\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1$

कुछ महत्वपूर्ण परिणाम/Some important results :

(i) $0! = 1$

(ii) $^nP_0 = 1$

सिद्ध/ Proof :

$$^nP_0 = \frac{n!}{(n-0)!}$$

$$^nP_0 = \frac{n!}{n!} \Rightarrow 1$$

(iii) $^nP_n = n!$

सिद्ध/Proof :

$$^nP_n = \frac{n!}{(n-n)!}$$

$$^nP_n = \frac{n!}{0!}$$

$$^nP_n = \frac{n!}{1} \Rightarrow n!$$

(iv) $^nP_r = n \times {}^{(n-1)}P_{(r-1)}$

सिद्ध/ Proof :

$$^nP_r = n \times {}^{(n-1)}P_{(r-1)}$$

$$^nP_r = n \times \frac{(n-1)!}{(n-1-r+1)!}$$

$$^nP_r = \frac{n!}{(n-r)!} \Rightarrow {}^nP_r$$

क्रमचय ज्ञात करने के प्रमुख सूत्र/Important formulas to find permutation :

कुल वस्तुएँ / Total items	एक बार में ली गई वस्तुएँ/Items taken at a time	क्रमचयों की संख्या/ Number of permutation
n	r	$^nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$
n	n	$^nP_n = n!$
n	p एक प्रकार की q एक प्रकार की r एक प्रकार की तथा शेष भिन्न-भिन्न/ p is alike of one kind q is alike of second kind r is alike of third kind and rest are different types	$\frac{n!}{p! \times q! \times r!}$
n	(r) जिनमें से प्रत्येक वस्तु की कितनी बार भी पुनरावृत्ति हो सकती है।/(r) Each of which can be repeated any number of times	n^r
n	(r) जबकि कोई विशेष वस्तु अवश्य ली जाए।/(r) When a particular item must be taken	$r \times {}^{(n-1)}P_{(r-1)}$

वृत्तीय या चक्रीय क्रमचय/Circular Permutations– दी हुई वस्तुओं में से कुछ अथवा सभी को एक वृत्त की परिधि के चारों ओर भिन्न-भिन्न क्रमों में रखने के ढंगो को वृत्तीय या चक्रीय क्रमचय कहते हैं।

The method of placing some or all of the given objects in different orders around the circumferences of a circle are called circular or cyclic permutation.

वृत्तीय क्रमचय ज्ञात करने के सूत्र/ Formula to find circular permutation :

दशा/ Case 1. जब दक्षिणावर्त (Clockwise) और वामावर्त (anticlock-wise) क्रमों में भेद हो–

When there is a difference between clockwise and anticlockwise sequences -

इस दशा में, n वस्तुओं में से r वस्तुएँ लेने पर,

In this case after taking 'r' items from 'n' items

वृत्तीय क्रमचयों की संख्या $= \frac{^nP_r}{r}$

no. of cyclic permutations $= \frac{^nP_r}{r}$

विशेष दशा जब r = n हो अर्थात् सभी वस्तुएँ एक साथ ली जाएँ, तब दशा 1 में,

in special case when r = n, means all objects (items) are taken at a time

वृत्तीय क्रमचयों की संख्या/number of cyclic permutations

$$= (n-1)\,!$$

दशा/Case 2. जब दक्षिणावर्त और वामावर्त क्रमों में कोई भेद न हो/When there is no difference between clockwise and anticlockwise -

वृत्तीय क्रमचयों की संख्या/number of cyclic permutations

$$= \frac{(n-1)!}{2}$$

संचय (Combination)

संचय (Combination)–यदि वस्तुओं के चयन में उनके क्रम पर ध्यान न दिया जाए, तो चयन का प्रत्येक ढंग संचय कहलाता है।

अर्थात ''वस्तु क्रम का ध्यान न रखते हुए दी हुई वस्तुओं में से कुछ अथवा सभी को एक साथ लेकर जो समूह या समुदाय बनते हैं उनमें से प्रत्येक समूह को संचय (Combination) कहते हैं।''

If the order of items is not taken into consideration while selecting them, then every method of selection is called combination, that means "Without keeping in mind the order of the items, the groups are communities that are formed by taking some or all of the given items together is called a combination.

TEAM SPY

संचय और क्रमचय में भेद (Difference between combination and permutation) :

संचय में वस्तु के क्रम पर ध्यान नहीं दिया जाता है, जबकि क्रमचय में वस्तु के क्रम पर ध्यान दिया जाता है।

In combination, the order of the objects is not taken into account whereas in permutation, attention is paid to the order of the objects.

संचय के लिए संकेतन (Notation for Combination)– n भिन्न भिन्न वस्तुओं में से r वस्तुओं को एक साथ लेने पर बने संचयों की कुल संख्या को प्रतीक ${}^nC_r$ या $C(n, r)$ से प्रदर्शित किया जाता है,

The total number of combination formed by taking r objects out of n different objects together is represented by the symbol ${}^nC_r$ or (n, r)

जहाँ/Where, $${}^nC_r = \frac{n!}{r! \times (n-r)!}$$

महत्वपूर्ण परिणाम/Important results

(i) $\mathbf{{}^nC_n = 1}$

(ii) $\mathbf{{}^nC_0 = 1}$

संचय ज्ञात करने के प्रमुख सूत्र/Important formula to find combination :

वस्तुएँ/ Objects	**एक बार में ली गई वस्तुएँ/ Number of objects taken at a time**	**संचयो की संख्या/ Number of combination**
n	r	${}^nC_r = \frac{n!}{r! \times (n-r)!}$
n	n	${}^nC_n = 1$
n	0	${}^nC_0 = 1$
n	r जिनमें p विशेष वस्तुएँ सदैव सम्मिलित की जाती हैं।/ r in which special object 'p' is always included	${}^{n-p}C_{r-p}$
n	r जिनमें p विशेष वस्तुएँ सदैव छोड़ दी जाती है/ r In which special object 'p' is always excluded	${}^{n-p}C_r$
n	कुल अथवा सभी/ All of them	$2^n - 1$

(p+q+r) वस्तुओं का p, q और r वस्तुओं के तीन समूहों में विभाजन -

The distribution/division of (p + q + r) objects into three groups of object p, q and r :

(p+q+r) वस्तुओं को p, q और r वस्तुओं के तीन समूहों में विभाजित करने की कुल विधियाँ

Total methods of dividing (p + q + r) objects into three groups of objects p, q and r

$$= \frac{(p+q+r)!}{p! \times q! \times r!}$$

वस्तुओं का समान विभाजन/Uniform division of objects :

3p वस्तुओं को p वस्तुओं के तीन भिन्न-भिन्न समूहों में विभाजित करने की कुल विधियाँ

Total method of dividing 3p objects into the three different groups of p objects

$$= \frac{(3p)!}{(p!)^3}$$

3p वस्तुओं को p वस्तुओं के एक जैसे तीन समूहों में अथवा 3 व्यक्तियों में बराबर-बराबर विभाजित करने की कुल विधियाँ

Total methods of dividing 3p objects into three equal groups of p objects

$$= \frac{(3p)!}{3! \times (p!)^3}$$

27 प्रायिकता (Probability)

प्रायिकता (Probability)

- प्रायिकता शब्द का शाब्दिक अर्थ 'सम्भावना' या 'सम्भाविता' से है। जब किसी घटना में संयोग (Chance) शब्द जुड़ जाता है, तो वह घटना अनिश्चित हो जाती है। घटना में अनिश्चित शब्द जुड़ने से उसमें सम्भावना उत्पन्न हो जाती है। यही सम्भावना घटना की प्रायिकता कहलाती है।

  The literal meaning of the work probability is 'possibility' or the probability of an event. When the word chance is added to an event, that event becomes uncertain. By adding uncertain words to an event, possibility arises in it. This possibility is called the probability of the event.

  संसार में सामान्यतः दो प्रकार के प्रयोग होते है। प्रथम प्रकार के प्रयोग के परिणाम निश्चित होते है। जैसे काँच का अपवर्तनांक चाहे, जिस विधि से चाहे जितनी बार निकाला जाए इसका मान सदैव 1.5 ही आता है।

  द्वितीय प्रकार के प्रयोग वो है, जिन्हें बार-बार दोहराने से परिणाम बदल जाते है। अर्थात इनके परिणाम संयोग पर निर्भर करते है।

  Generally there are two types of experiments in the world. The results of the first type of experiment are definite.
  For example, no matter how many times the refractive index of glass is calculated, its value always comes to 1.5.
  The second type of experiments are those whose results change when repeated repeatedly. That is, their results depend on chance.

Ex. :

(i) सिक्के को फेंकने से यह निश्चित नहीं होता कि ऊपर शीर्ष आएगा या पुच्छ।/ By throwing a coin it is not certain whether it will come up head or tails.

(ii) पाँसे को यदृच्छया फेकने से 1, 2, 3, 4, 5, 6 कौन सा अंक ऊपर आएगा निश्चित नहीं है।/ It is not certain which number 1, 2, 3, 4, 5, 6 will come up by throwing the dice at random.

अतः द्वितीय प्रकार के प्रयोग (जो प्रारम्भ में जुआरी और सटोरियों किया करते थे) के अध्ययन को ही प्रायिकता कहते है।

Therefore, the study of the second type of experiment (which was initially done by gamblers and (speculators) is called probability.

कार्नर ने कहा, ''सम्भावना अनिश्चित घटनाओं के बारे में मस्तिष्क की एक स्थिति है।''

Carner said, "Probability is a state of mind about uncertain events."

लाप्लास के अनुसार, ''सम्भावना अनुकूल घटनाओं का समान सम्भावनाओं वाली समस्त घटनाओं के साथ अनुपात है।''

According to Laplace, "Probability is the ratio of favorable events to all events with equal probability."

महत्वपूर्ण शब्दावली (Salient terminology)

प्रयोग/Experiment :

प्रयोग शब्द का उपयोग वहाँ होता है जहाँ परिणाम का निर्धारण किया जाना है।

The word experiment is used where the result is to be determined.

यादृच्छिक प्रयोग/ Random experiment : जब किसी प्रयोग की पुनरावृत्ति बार-बार की जाती है और परिणाम समान प्राप्त नहीं होते है। ऐसे प्रयोग यादृच्छिक प्रयोग कहलाते है।

When an experiment is repeated again and again and the results are not the same. Such experiments are called random experiments.

परख एवं घटना/Trial and event : किसी संख्यात्मक आकड़ों को प्राप्त करने के लिए किए गये प्रयोग अथवा अपनायी गयी प्रक्रिया को 'परख' कहते है।

The experiment or process adopted to obtain any numerical data is called trial.

Ex. : सिक्के का उछलना (कितनी बार)/ Coin tossing (how many times)

पॉसे का लुढ़कना (कितनी बार)/Dice rolling (how many times)

किये गये प्रयोग के बाद प्राप्त परिणाम घटना कहलाते है।/ The results obtained after an experiment are called events

Ex. : सिक्के का सिर या पुच्छ आना पाँसे का कोई अंक (1, 2, 3, 4, 5, 6) आना।/A coin getting heads or tails, a dice getting any number (1, 2, 3, 4, 5, 6).

सर्वांगपूर्ण घटनाएं/ Exhaustive event– एक यादृच्छिक प्रयोग के सम्भावित परिणामों की कुल संख्या प्रयोग के लिये सर्वांगपूर्ण घटनाऐ कहलाती है।

The total number of possible outcomes of a random experiment is called the exhaustive events.

Ex. : एक सिक्के के उछाल से चित या पट प्राप्त हो सकता है। अतः सर्वांगपूर्ण घटनाओं की संख्या 2 होगी।

A coin can be tossed to get heads or tails. Hence the number of exhaustive events will be 2.

TEAM SDV

गणितीय व्याख्या (Mathematical explanation)

यदि किसी प्रयोग में घटना E, a विधियों से घट सकती है और b विधियों से नहीं घट सकती है और इनमें से प्रत्येक विधि सम्प्रायिक (Equally likely) हो अर्थात् इन सब विधियों की सम्भावना समान रूप से हो,

If in an experiment an event E can occurs by 'a' methods and cannot occur by b methods and each of these methods is equally likely, that is, all these methods have equal probability, then, the event will occur.

तो/then,

घटना घटने की प्रायिकता/Probability of occurrence

$$=\frac{a}{a+b}$$

घटना न घटने की प्रायिकता/Probability of event not occurring $=\frac{b}{a+b}$

यदि घटना E के होने की प्रायिकता को P(E) से व्यक्त करें तो/ If the probability of occurrence is P(E) then

$$P(E)=\frac{a}{a+b}$$

इसी प्रकार यादि घटना E के न होने की प्रायिकता $P(\bar{E})$ हो तो/ If the probability of not occurrence is $P(\bar{E})$ then

$$P(\bar{E})=\frac{b}{a+b}$$

Ex. : एक लाटरी में 6 टिकटे इनाम की है 11 टिकटे खाली है। तो इनाम प्राप्त करने की प्रायिकता तथा इनाम न प्राप्त करने की प्रायिकता।/ In an lottery, there are 6 prize tickets and 11 tickets are vacant. So the probability of getting the reward and the probability of not getting the reward.

Sol. : $P(E)=\frac{6}{6+11}\Rightarrow\frac{6}{17}$

$$P(\bar{E})=\frac{11}{6+11}\Rightarrow\frac{11}{17}$$

जब हम कहते है कि कोई घटना a प्रकार से घट सकती है और b प्रकार से नहीं घट सकती है तो ऐसा कहने का अर्थ यह है कि घटना के घटने और न घटने की प्रायिकता a : b के अनुपात में है। यदि घटने की प्रायिकता Ka से सूचित करे जहाँ K कोई अनिर्धारित अचर हो, तो घटना के असफल होने की प्रायिकता Kb से निरूपित किया जायेगा।

When we say that an event can happen in 'a' ways and cannot happen in 'b' ways, it means the probability of the event happening and not happening is in the ratio a : b. If the probability of occurrence is denoted by Ka, where K is an undetermined constant, then the probability of failure of the event will be denoted by Kb.

चूँकि घटने की प्रायिकता + न घटने की प्रायिकता = K (a + b)

Since the probability of occurrence + the probability of not occurrence = K (a + b)

चूँकि घटना या तो घटित होगी या घटित नहीं होगी, अतः घटने की प्रायिकता और न घटने की प्रायिकताओं का योगफल K (a + b) है, जो निश्चितता अथवा यथार्थता निरूपित करेगा।

Since the event will either occur or will not occur, hence the sum of the probability of occurrence and the probabilities of not occurring is K(a + b), which is the certainty represent accuracy.

यदि निश्चितता को इकाई मान ले

If certainty is taken to be unit,

$$K(a+b)=1$$

$$K=\frac{1}{a+b}$$

इस प्रकार घटने की प्रायिकता/ Thus the probability of occurrence $=\frac{a}{a+b}=P(E)$

घटना न घटने की प्रायिकता/ The probability of not occurrence $=\frac{b}{a+b}=P(\bar{E})$

घटना $\bar{E}$ को E की पूरक घटना कहते है। यदि घटना होने की प्रायिकता को P से निरूपित करें और न होने की प्रायिकता को q से सूचित करें तो,

The event $\bar{E}$ is called the complementary of E. If the probability of occurrence of an event is denoted by P and the probability of not occurrence is denoted by q, then,

$$P(E)+P(\bar{E})=P+q=\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a+b}=1$$

$$\boxed{q=1-P}$$

या/or $P(A)'+P(A)=1$

किसी घटना के होने की प्रायिकता/Probability of occurrence of an event = $\frac{a}{a+b}$

इसके स्थान पर कभी-कभी इस प्रकार भी लिखते है कि घटना का अनुकूल संयोगानुपात (Odds in favour of an event) = a : b

घटना का प्रतिकूल संयोगानुपात (Odds in against of an event) = b : a

Ex. : एक घटना के अनुकूल संयोगानुपात 3 : 5 हो, तो उसके घटने की प्रायिकता ज्ञात करों?

If the chance of favorable ratio of an event is 3 : 5 then find the probability of occurrence.

∵ एक घटना का अनुकूल संयोगनुपात/ The chance of favorable ratio $=\frac{3}{5}$

घटना के घटित होने की प्रायिकता/ Occurrence of an event

$$=\frac{3}{3+5}=\frac{3}{8}$$

प्रतिदर्श-समष्टि (Sample space)

■ किसी प्रयोग के परिणामों के समुच्चय को प्रतिदर्श समष्टि कहते है। इसे S द्वारा निरूपित करते है।
The set of results of an experiment is called sample space. It is denoted by S.

Ex. : एक सिक्के को उछालनें में प्रतिदर्श-समष्टि में दो बिन्दु होते है शीर्ष (Head), पुच्छ (Tail)
In tossing a coin, the sample space consists of two points : head and tail.
अर्थात्/hence, $S=\{H\ T\}$

Ex. : यदि एक थैले में 4 गेंदे भिन्न-भिन्न रंग की है। लाल (R), नीली (B), पीली (Y) और सफेद (W), यदि एक बार में दो गेंदे निकाली जाती हों, तो इसका प्रतिदर्श क्या होगा?
If there are four balls of different colours in a bag. Red (R), Blue (B), Yellow (Y) and White (W). If two balls are drawn at a time what will be the sample space :

Sol. : एक बार में कोई-भी दो गेंदे निकाली जा सकती है, जो भिन्न रंग की होगी तो प्रतिदर्श समष्टि है–
Any two balls can be taken out at a time, which will be different colour, then the sample space is :
$S=\{RB, RY, RW, BY, BW, YW\}$
यदि अब यों कहा जाए कि नीली–पीली, नीली–सफेद के दो जोड़े ही लेने है, तो लिखेंगे–
If it is said that only two pairs of blue-yellow and blue-white are to be taken, then we will write
$S(E)=(BY, BW)$
जहाँ S(E) घटना E को निरूपित करने वाले बिन्दुओं की संख्या है।
Where, S(E) is the number of points representing event E.

सम्भावना का प्रकटीकरण (Expression of probability)

■ सम्भावना सदैव 0 से 1 के मध्य कोई संख्या होती है। यदि किसी घटना का घटित होना निश्चित हो तो उसकी सम्भावना 1 होगी और यदि यह निश्चित हो कि वह घटना कभी घटित नहीं होगी तो उसके घटने की सम्भावना 0 होगी।
Probability is always a number between 0 to 1. If an event is certain to happen in its probability will be one (1). If it is certain that the event will never happen then its probability will be zero (0).
"किसी घटना E के होने की प्रायिकता S(E)/S(P) का अनुपात होता है।"
The probability of occurrence of an event E is the ratio S(E)/S(P).

$$P(E)=\frac{S(E)}{S(P)}=\frac{\text{अनुकूल परिस्थिति}}{\text{कुल परिस्थिति}}$$

$$P(E)=\frac{S(E)}{S(P)}=\frac{\text{Favorable outcome}}{\text{Total outcome}}$$

जहाँ S(E), S(P) का उपसमुच्चय होता है।
Where, S(E) is a subset of S(P)

Ex. : बारह टिकटों पर एक-एक संख्या 1 से 12 तक लिखी हुयी संख्या के 2 अथवा 3 के गुणक होने की प्रायिकता ज्ञात करें?
Find the probability of each number written on twelve tickets being a multiple of 2 or 3, from 1 to 12?

Sol. : 1 से 12 तक की संख्याओं में 2 अथवा 3 के गुणक 2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12 है। चूँकि समप्रायिक 12 स्थितियों में से 8 पक्ष में है।
In the number 1 to 12 the multiples of 2 or 3 are 2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12 since the probability is 8 out of 12 situations.
अतः/hence, $S(P)=12$ $S(E)=8$
$\therefore$ अभीष्ट प्रायिकता/required probability

$$P(E)=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$$

समसम्भावी घटनाऐं या समप्रायिक घटनाऐं (Equally likely events)

■ यदि दो या दो से अधिक घटनाओं में से प्रत्येक के घटित होने की सम्भावना समान है तो ऐसी घटनाऐं समसम्भावी घटनाऐं कहलाती है।
If each of two or more events, the probability of occurrence is equal then such events are called equally likely events.

Ex.: पाँसे की एक फेंक में 1, 2, 3, 4, 5, 6 में से किसी भी अंक के ऊपर आने की प्रत्येक घटना समसम्भावी है।
For example, in a throw of a dice, every occurrence of any of the number 1, 2, 3, 4, 5, 6 coming up is equally probable.

परस्पर अपवर्जी घटनाऐं (Mutually Exclusive Events)

■ उन घटनाओं को परस्पर अपवर्जी कहते है। जिनमें से एक ही घटे (सफल हो), अन्य नहीं घट सकती हो।
Those events are called mutually exclusive, out of which only one can happen (be successful) the other can't happen.

Ex. : यदि एक रुपऐ के सिक्के को फेका जाए और यदि चेहरे वाले भाग को सिर और दूसरे भाग को पुँच्छ कहे और नीचे गिरने पर सिर वाला भाग ऊपर आए, तो पुँच्छ वाला भाग ऊपर नहीं आ सकता और यदि पुँच्छ वाला भाग ऊपर आए तो सिर वाला भाग ऊपर नहीं आ सकता। अतः दोनों घटनाऐं परस्पर अपवर्जी घटनाऐं है।
If a one rupee coin is tossed and the face part is called head and other part is called tail and when it tossed, the head comes up, then tail cannot comes up and if tail comes up then head cannot comes up. Hence both the events are mutually exclusive events.

TEAM SPW

Ex. : किसी पद पर A की नियुक्ति की प्रायिकता 1/3 है तथा B की 2/5 है। उनमें से केवल एक ही की नियुक्ति हो इस बात की प्रायिकता क्या है?

The probability of appointment of A to a post is 1/3 and that of B is 2/5. What is the probability that only one of them is appointed.

Sol. : किसी पद पर A या B की नियुक्ति में परस्पर अपवर्जी घटनाऐं है, क्योंकि यदि A की नियुक्ति होती है तो B की नहीं होगी।

Appointment of A or B to a post is a mutually exclusive event, because if A is appointed then B will not be appointed vice-versa.

यदि B की नियुक्ति होती है, तो A की नियुक्ति नहीं होगी।

अतः इनमें से किसी एक की नियुक्ति होने की प्रायिकता

Hence, probability of appointment of only one

$$=\frac{1}{3}+\frac{2}{5}$$

$$=\frac{5+6}{15}\Rightarrow\frac{11}{15}$$

स्वतंत्र तथा परतंत्र (आश्रित) घटनाऐं (Independent an dependent events)

■ किसी प्रतिदर्श समष्टि की दो घटनाऐं E_1 तथा E_2 हैं यदि इसमें से किसी एक घटना के घटित होने अथवा घटित न होने का प्रभाव दूसरी घटना के घटित होने की प्रायिकताओं पर नहीं पड़ता तो दोनों घटनाऐं परस्पर स्वतंत्र कहलाती है। अन्यथा घटनाऐं परतंत्र (आश्रित) घटनाऐं कही जाती है।

There are two events E_1 and E_2 in a sample space. If the occurrence or non-occurrence of one of the events does not affect the probability of occurrence of the probability of occurrence of the other event, then both the events are called mutually independent. Otherwise the events are called dependent events.

Ex. : 52 ताश वाली गड्डी से दो पत्ते क्रमानुसार खींचे जाते है, तो दोनों पत्ते दो विधि से खींचे जाते है–

If two cards are drawn sequentially from a deck of cards, then both the cards are drawn in two ways :

(i) पहला खींचा इक्का गड्डी में पुनः मिला दिया जाता है।

The first ace drawn is shuffled into the deck.

(ii) निकाला गया पत्ता पुनः गड्डी में नहीं मिलाया जाता है।

The drawn card is not added to the deck again.

Sol. : उपर्युक्त में S = {52 ताश के पत्ते}/ In the above S = {52 playing cards}

(i) E_1 = {52 पत्तों में से एक इक्का खींचने की घटना}

E_1 = {Event of drawing second ace out of 52 cards}

E_2 = {52 पत्तों में से दूसरा इक्का खींचने की घटना}

E_2 = {Event of drawing second ace out of 52 cards}

यहाँ पर दोनों पत्ते 52 पत्तों से ही निकाले जाते हैं। अतः दोनों घटनाऐं स्वतंत्र है।

Here both the cards are drawn from 52 cards only. Hence, both events are independent.

(ii) E_3 = {52 पत्तों में से एक इक्का खींचने की घटना}

E_3 = {Event of drawing an ace from 52 cards}

E_4 = {51 पत्तों में से एक इक्का खींचने की घटना}

E_4 = {Event of drawing an ace from 51 cards

E_3 घटना के घटित होने का प्रभाव E_4 घटना पर पड़ता है।

The occurrence of event E_3 affects the event E_4.

अतः E_4, E_3 पर आश्रित घटना अथवा परतंत्र घटना है।

Hence E_4 is a dependent event on E_3.

पूरक घटनाऐं (Complementary events)

■ यदि किसी प्रयोग में प्रतिदर्श समष्टि S हो तथा इसका उपसमुच्चय E किसी घटना को प्रदर्शित करता है, तो S के सापेक्ष E का पूरक समुच्चय E' भी एक घटना है, जो E की पूरक घटना कहीं जाती है।

If the sample space in an experiment is S and its subset E represents some event, then the complementary set E' of E with respect to S is also an event, which is called the complementary event of E.

Ex.: यदि $\bar{A}$ एक घटना हो और A उसकी पूरक घटना हो, तो

$$\boxed{P(A)=1-P(\bar{A})}$$

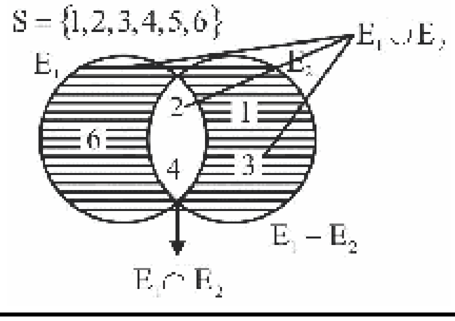
If A' is an event and A is its complementary event. then, P(A) = 1 – P(A)

घटनाओं की संक्रियायें (Operation of events)

■ **घटनाओं का संघ (Union of events)**–यदि E_1 तथा E_2 प्रतिदर्श समष्टि S की दो घटनाऐं हैं, तो वह घटना जिसमें वे सब अवयव उपस्थित हैं, जो या तो E_1 में अथवा E_2 में अथवा E_1 और E_2 दोनों में है, घटनाओं E_1 तथा E_2 संघ कहा जाता है तथा इसे $E_1 \cup E_2$ से प्रदर्शित किया जाता है।

If E_1 and E_2 are two events of the sample space S, then the event in which all those elements are present, which are either E_1 or E_2 or both E_1 and E_2 the event E_1 and E_2 are called and denoted by $E_1 \cup E_2$.

पाँसे की एक फेक लिए चित्र (Picture for a throw of dice)-



S = पाँसे की फेक के लिए $S=\{1,2,3,4,5,6\}$

S = To roll the dice $=\{1,2,3,4,5,6\}$

E_1 = सम संख्या प्राप्त करना $=\{2,4,6\}$

E_1 = To find even number $=\{2,4,6\}$

E_2 = 5 से कम संख्या प्राप्त करना $=\{1,2,3,4\}$

E_2 = To find number less than 5 $=\{1,2,3,4\}$

Ex. : यदि दो सिक्के उछाले जाऐं तो वह घटना मालूम करों।

If two coin are tossed find the event

(i) कम से कम एक शीर्ष गिरे।/At least one head appears

(ii) कम से कम एक पुच्छ गिरे।/At least one tail appears

Sol. :

(i) कम से कम एक शीर्ष गिरने के बिन्दु HH, HT, TH होंगे।/ Events of at least one head appears HH, HT, TH

अतः प्रतिदर्श समष्टि $A=\{HH, HT, TH\}$

Therefore the model set $A=\{HH, HT, TH\}$

(ii) कम से कम एक पुच्छ गिरने के बिन्दु TT, TH, HT

प्रतिदर्श समष्टि B = {TT, TH, HT}

Events of at least one tail appears {TT, TH, HT}

the model set B = {TT, TH, HT}

$A \cup B$ = {HH, HT, TH, TT}

(ii) घटनाओं का सर्वनिष्ठ (Intersection of events)–यदि E_1 तथा E_2 प्रतिदर्श समष्टि S की दो घटनाऐं है, तो वह घटना जिसमें वे सब अवयव सम्मिलित होते है तो E_1 व E_2 दोनों में घटनाओं का सर्वनिष्ठ कहा जाता है तथा $E_1 \cap E_2$ से प्रदर्शित किया जाता है।

If E_1 and E_2 are two events of model space S, then the event which includes all those elements that are in both E_1 and E_2 is called intersection of events and is represented by $E_1 \cap E_2$.

(iii) घटनाओं का अन्तर (Difference of events)– यदि प्रतिदर्श समष्टि की दो घटनाऐं E_1 तथा E_2 हैं, तो E_1 के उन सब अवयवों वाली घटना को जिसमें E_1 के अवयव नहीं है $E_2 - E_1$ से प्रदर्शित की जाती है E_2, E_1 का अन्तर कहलाता है।

If E_1 and E_2 are two events of the sample space S. Then the event consisting of all these elements of E_1 and which are not elements of E_1 is represented by $E_2 - E_1$ is called difference of events.

पूर्ण प्रायिकता का प्रमेय (प्रायिकता का योगशील गुण)
(Theorem of total probability or additive property of probability)

"यदि P_1, P_2, P_3.........P_n परस्पर अपवर्जी (Mutually exclusive) n घटनाओं के घटने की क्रमशः प्रायिकताऐं हो तो इन संख्याओं में से किसी एक के घटने की प्रायिकता $P_1 + P_2 + P_3 + ...P_n$ होती है।"

If P_1, P_2, P_3, ... P_n are mutually exclusive probabilities of occurrence of n events respectively then the probability of occurrence of any one of these numbers is $P_1 + P_2 + P_3 + ... P_n$.

Ex. : किसी पद पर A की नियुक्ति की प्रायिकता 1/3 और B की नियुक्ति की प्रायिकता 2/5 है। उनमें से केवल एक ही नियुक्ति हो इस बात की प्रायिकता क्या है।

To probability of appointment of A to a post is 1/3 and the probability of appointment of B is 2/5. What is the probability that only one of them is appointed?

Sol. : किसी पद पर A या B की नियुक्ति में परस्पर अपवर्जी घटनाऐं हैं यदि A की नियुक्ति होती है, तो B की नहीं होगी। यदि B की नियुक्ति होती है, तो A की नहीं होगी।

The appointment of A or B to a post are mutually exclusive events. If a appointed, then B will not. If B is appointed, then A will not be. Hence, the probability of appointment of any one of them is :

अतः इनमें किसी एक की नियुक्ति होने की प्रायिकता

$=\frac{1}{3}+\frac{2}{5}$

$=\frac{5+6}{15} \Rightarrow \frac{11}{15}$

मिश्र प्रायिकता का प्रमेय
(Theorem of compound probability)

"यदि दो स्वतंत्र घटनाओं की प्रायिकता अलग-अलग ज्ञात हों, तो दोनों घटनाऐं (एक साथ) घटेंगी। इसकी प्रायिकता उनकी अलग-अलग प्रायिकताओं के बराबर होता है।"

If the probability of two independent events are known separately, then both events will occur (simultaneously). The probability of this is equal to their individual probabilities.

यदि n स्वतंत्र घटनाओं की प्रायिकताऐं P_1, P_2, P_3,.........P_n हों, तो सभी घटनाओं के घटने की प्रायिकता P है।

If the probabilities of independent events are P_1, P_2, P_3 .... P_n, the probability of occurrence of all the events is P.

तो/then, $\boxed{P = P_1.P_2.P_3..........P_n}$

Note 1 : यदि एक प्रयत्न में किसी घटना के होने की प्रायिकता P हो, तो r प्रयत्नों में लगातार इसके होने की प्रायिकता P.P..........r बार = P^r होती है।

If the probability of occurrence of an event is one attempt is P, then the probability of its happening in consecutive 'r' attempts is P. P ...... r times = P^r.

TEAM SPY

Note 2 : यदि n घटनाओं के होने की प्रायिकताऐं P_1 P_2........P_n हो, तो इन सबके न होने की प्रायिकता होती है। अतः इनमें से कम से कम एक घटना अवश्य हो इसकी प्रायिकता

If the probability of occurrence of n events are P_1. P_2 .... P_n then there is a probability of not happening of all these events.

Hence, the probability of occurrence at least one.

$1-(1-P_1)(1-P_2)..........(1-P_n)$

Ex. : ताशों की गड्डी से एक-एक करके चार ताश खींचे जाते है और उन्हें फिर गड्डी में नहीं रखा जाता है। बताओं उन सबके बादशाह होने की क्या प्रायिकता है?

Four cards one by one from the deck of cards are drawn and are not put back into the deck, then find what is the probability of them all being kings?

Sol. : 52 ताश की गड्डी में 4 बादशाह होते हैं। अतः एक बादशाह खींचने की प्रायिकता = 4/52 चूँकि खींचे हुये ताश को फिर से गड्डी में नहीं रखा जाता है। अतः शेष 51 ताश रह जाते है और यदि बादशाह खींच लिया गया, तो शेष तीन बादशाह रह गये अतः दूसरी बार बादशाह खींचने की प्रायिकता = 3/51

इसी प्रकार तीसरी बार और चौथी बार बादशाह खींचने की प्रायिकताऐं क्रमशः 2/50 और 1/49 होगी।

∵ घटनायें स्वतंत्र है,

अतः अभीष्ट प्रायिकता $=\frac{4}{52}\times\frac{3}{51}\times\frac{2}{50}\times\frac{1}{49}$

$=\mathbf{\frac{1}{270725}}$

There are 4 kings in a deck of 52 cards so one probability of drawing the king = $\frac{4}{52}$. Since the drawn card in not put back into the deck. Hence the remaining 51 cards remain and so one.

Second time probability = $\frac{3}{51}$

Third time probability = $\frac{2}{50}$

Fourth time probability = $\frac{1}{49}$

Required probability = $\frac{4}{52}\times\frac{3}{51}\times\frac{2}{50}\times\frac{1}{49}=\mathbf{\frac{1}{270725}}$

Ex. : A के द्वारा एक प्रश्न हल करने की प्रायिकता 2/3 है, तथा B के द्वारा इसे हल करने की प्रायिकता 3/5 है। इन दोनों में से कम से कम एक द्वारा प्रश्न हल हो जाने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए?

The probability of A solving a question is 2/3, and the probability of B solving it is 3/5. Find the probability that the question will be solved by at least one of these two?

Sol. : P_1 = A के द्वारा प्रश्न हल करने की प्रायिकता = 2/3

तथा P_2 = B के द्वारा प्रश्न हल करने की प्रायिकता = 3/5

तब दोनों में से कम से कम एक द्वारा प्रश्न हल हो जाने की प्रायिकता

P1 = Probability of solving the question by A = 2/3 and P2 = Probability of solving the question by B = 3/5, then the probability of solving the question by at least one of the two

$= 1-(1-P_1)(1-P_2)$

$=1-\left(1-\frac{2}{3}\right)\left(1-\frac{3}{5}\right)$

$=1-\frac{1}{3}\times\frac{2}{5}$

$\Rightarrow\frac{15-2}{15}=\frac{13}{15}$

गणितीय प्रत्याशा
(Mathematical expectation)

"यदि किसी कार्य में एक व्यक्ति के सफल होने की प्रायिकता P हो और M वह धन हो जो सफल होने पर वह प्राप्त करेगा, तो धन PM उसकी प्रत्याशा होगी।"

If P is the probability of a person succeeding in a task and M is the money he will receive if the he succeeds, then P × M is his expectation.

Ex. : A और B एक पाँसे को 1100 रुपए के इनाम पर फेकते है जो उस खिलाड़ी द्वारा जीता जाता है जो पहले 6 फेंकता है। यदि A ने पहले पाँसा फेंका, तो उनकी क्रमशः क्या प्रत्याशाऐं हैं।

A and B throw a dice for a price of Rs. 1100 which is won by the player who throws b first. If A throws the dice first, what is this respective expectations?

Sol. : छः फेंकने की प्रायिकता = 1/6

Probability of throwing a six = $\frac{1}{6}$

पहले फेंकने में A के जीतने की प्रायिकता = 1/6 है और इस बात की प्रायिकता कि B को अवसर मिलेगा 5/6 है, क्योंकि उस अवस्था में A हार जाऐगा।

The probability of A of winning in the first throw is = $\frac{1}{6}$ and the probability that B will get the chance is $\frac{5}{6}$, because in that case A will loss.

अतः पहले फेंकने में B के जीतने की प्रायिकता $=\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}$

Therefore, probability of 'B' winning in the first throw = $\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}$

दूसरे फेंकने में Aके जीतने की प्रायिकता $= \frac{5}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}$

(क्योंकि उस अवस्था में B हार चुका होगा।)

In second throw probability of 'A' winning = $\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}$ (Because in that case B would have lost)

दूसरी बार फेंकने में B के जीतने की प्रायिकता/ Probability of B winning in second throw

$= \frac{5}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}$

$= \left(\frac{5}{6}\right)^3 \times \frac{1}{6}$

तीसरी बार फेंकने में A के जीतने की प्रायिकता/ Probability of A winning in third throw

$= \left(\frac{5}{6}\right)^4 \times \frac{1}{6}$

तीसरी बार फेंकने में B के जीतने की प्रायिकता/ Probability of B winning in third throw

$= \left(\frac{5}{6}\right)^5 \times \frac{1}{6}$........ इत्यादि।

अतः A के जीतने की प्रायिकता/ Hence, the probability of A winning

$= \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right) + \left(\frac{5}{6}\right)^4 \frac{1}{6} + ...$

$\Rightarrow \quad \frac{1}{6}\left[1 + \left(\frac{5}{6}\right)^2 + \left(\frac{5}{6}\right)^4 + ...\right]$

$\Rightarrow \quad \frac{1}{6}\left[\frac{1}{1-\frac{25}{36}}\right] = \frac{6}{11}$

$\left[\because \text{ गुणोत्तर श्रेणी में } \left(a + ar + ar^2 + ...\ \infty\right) \quad S_n = \frac{a}{a-r}\right]$

$\left[\because \text{ in geometric series } \left(a + ar + ar^2 + ...\ \infty\right) \quad S_n = \frac{a}{a-r}\right]$

B के जीतने की प्रायिकता/probability of B winning :

$= \frac{5}{6}\times\frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^3 \times \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^5 \times \frac{1}{6} + ...$

$\Rightarrow \quad \frac{1}{6}\times\frac{5}{6}\left[1 + \left(\frac{5}{6}\right)^2 + \left(\frac{5}{6}\right)^4 + ...\right]$

$\Rightarrow \quad \frac{5}{36}\times\frac{1}{1-\frac{25}{36}} = \frac{5}{11}$

अतः A की प्रत्याशा $= \frac{6}{11}\times 1100$ रुपए

= 600 रुपए

Hence, A's expectation $= \frac{6}{11}\times 1100$ rupees

= 600 rupees

तथा B की प्रत्याशा $= \frac{5}{11}\times 1100$ रुपए

= 500 रुपए

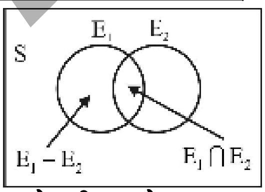
and B's expectation $= \frac{5}{11}\times 1100$ rupees

= 500 rupees

समुच्चय सिद्धान्त आधारित प्रायिकता प्रमेय (Probability theorem based on set theory)

(i) यदि E_1 व E_2 दो घटनाऐं हो, तो/ If E_1 and E_2 are two events, then

$$\boxed{P(E_1 - E_2) = P(E_1) - P(E_1 \cap E_2)}$$



(ii) प्रायिकता का योगशील प्रमेय (Additive theorem of probability)–

(a) यदि किसी प्रतिदर्श समष्टि S की दो घटनाऐं E_1 तथा E_2 हैं, तो दोनों घटनाओं की प्रायिकताओं का योगफल दोनों घटनाओं के संघ और सर्वनिष्ठ की प्रायिकताओं के योगफल के बराबर होता है।

If there are two events E_1 and E_2 in a sample space, then the sum of the probability of both the events is equal to the sum of the probability of the union of the intersection of both events.

$$\boxed{P(E_1) + P(E_2) = P(E_1 \cup E_2) + P(E_1 \cap E_2)}$$

या/or

$$\boxed{P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)}$$

(b) यदि E_1 तथा E_2 परस्पर अपवर्जी घटनाऐं हैं, तो घटनाओं की प्रायिकताओं का योगफल दोनों घटनाओं की प्रायिकताओं के सम्मिलन के बराबर होता है।

If E_1 and E_2 one mutually exclusive events then the sum of the probability is of individual events is equal to the sum of probabilities of both the events.

$\because \quad P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$

यदि घटनाऐं अपवर्जी है।/If the events are exclusive,

तो/then, $\quad P(E_1 \cap E_2) = 0$

अतः/hence, $\quad P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$

TEAM SPY

Ex. : यदि 10 टिकटों पर 1 से 10 तक की (प्रत्येक पर एक) संख्याऐं लिखी गयी है। कोई संख्या दोहराई नहीं गयी है। यदि A एक ऐसी घटना है। जिसमें विषम संख्यायें हो और B एक ऐसी घटना हो, जिसमें 3 से विभाज्य संख्या हो, तो दिखाओं कि,

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

If number from 1 to 10 (one on each) are written on 10 tickets. No number are repeated if A is such event in which there are odd numbers and B is an event in which number divisible by 3 is marked. The show P $(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Sol. : प्रतिदर्श समष्टि/Sample space $=\{1,2,3,.........10\}$

$A=\{1, 3, 5, 7, 9\}$

$B=\{3, 6, 9\}$

$P(A)=\frac{5}{10}=\frac{1}{2},\ P(B)=\frac{3}{10}$

$A\cup B=\{1, 3, 5, 6, 7, 9\}$

$A\cap B=\{3, 9\}$

$P(A\cup B)=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$

$P(A\cap B)=\frac{2}{10}\quad\frac{1}{5}$

$\therefore\quad P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{1}{2}+\frac{3}{10}-\frac{1}{5}\quad=\frac{3}{5}$

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

प्रतिबन्धी प्रायिकता
(Conditional probability)

मान लीजिए किसी प्रतिदर्श समष्टि की दो घटनाऐं E_1 तथा E_2 है।

तथा $P(E_1)\neq 0$

Suppose there are two events E_1 and E_2 in a sample space and $P(E_1) \neq 0$.

यदि यह मान लिया जाए कि घटना E_1 घटित होती है तो हम पूरे प्रतिदर्श समष्टि S के सभी तत्वों को दृष्टि में रखकर केवल E_1 के तत्वों पर ही विचार करेंगे। इस प्रतिबन्ध के अन्तर्गत लघुकृत प्रतिदर्श समष्टि (Reduced sample space) केवल E_1 ही होगा। अब E_1 के घटित होने के लिये यह आवश्यक है कि $E_1\cap E_2$ कोई बिन्दु (अवयव) पाया जाए।

If it is assumed that the event E_1 occur, then considering all the elements of the complete sample space S, we will consider only the elements of E_1. Under this restriction the sample space will be E_1 only. Now for the occurrence for E_1, it is necessary that some point (element) $E_1 \cap E_2$ be found.

अतः इस लघुकृत प्रतिदर्श समष्टि पर E_2 की प्रायिकता $\frac{n(E_1\cap E_2)}{n(E_1)}$ होगी।

Therefore, the probability of E_2 on this reduced sample space is $\frac{n(E_1\cap E_2)}{n(E_1)}$

इसी को E_2 घटना की प्रतिबन्धी प्रायिकता E_1 के घटित होने के प्रतिबन्ध के आधार पर कहा जाता है।

This is called the restricted probability of event E_2 on the basis of the restriction of occurrence E_1.

अतः/hence, $\quad P\ \frac{E_2}{E_1}\ =\frac{n(E_1\cap E_2)}{n(E_1)}$

इसी प्रकार/similarly, $\quad P\ \frac{E_2}{E_1}\ =n\frac{(E'_1\cap E_2)}{n(E'_1)}$

Ex. : किसी विद्यालय की एक कक्षा में 80 विद्यार्थी है। जिसमें 50 ने गणित, 40 ने सांख्यिकीय और 10 ने दोनों विषय ले रखे है। किसी छात्र को यदृच्छया चुना जाता है। प्रायिकता ज्ञात कीजिऐ कि वह सांख्यिकीय का छात्र है।

There are 80 students in a class of a school. In which 50 have taken Mathematics, 40 have taken statistics and 10 have taken both the subjects. A student is selected at random. Find the probability that he is a student of statistics.

Sol. : माना गणित के छात्रों का समुच्चय M तथा सांख्यिकीय के छात्रों का समुच्चय S है।

Let the set of mathematics students be M and the set of statistics student be S.

$\therefore\quad n(M)=50,\ \ n(S)=40$

$n(M\cap S)=10$

$\because$ कोई एक छात्र 80 प्रकार से चुना जा सकता है।/ Only one student can be selected in 80 ways

$P(M)=\frac{50}{80}=\frac{5}{8},\ \ P(S)=\frac{40}{80}=\frac{1}{2}$

$P(M\cap S)=\frac{10}{80}=\frac{1}{8}$

अतः सांख्यिकीय का छात्र होने की प्रायिकता, यदि वह गणित का छात्र है।

Hence the probability of being a student in mathematics is

$P(S/M)=\frac{P(S\cap M)}{P(M)}=\frac{P(M\cap S)}{P(M)}=\frac{1/8}{5/8}=\frac{1}{5}$

मिश्र प्रायिकता प्रमेय
(Compound probability theorem)

(i) यदि दो घटनाओं E_1 तथा E_2 के साथ घटने की प्रायिकता, E_1 की प्रायिकता तथा E_2 की प्रतिबंधी प्रायिकता, जबकि E_1 घट चुकी है, के गुणनफल के बराबर होता है अर्थात्

If the probability of occurrence of two events E_1 and E_2 is equal to the product of the probability of E_1 and the restricted probability of E_2 when E_1 has occurred i.e.

$$P(E_1 \cap E_2) = P\ \frac{E_2}{E_1}\ .P(E_1)$$

(ii) यदि दो घटनाऐं E_1 तथा E_2 स्वतंत्र हो, तो उनके एक साथ घटने की प्रायिकता, उनकी अलग-अलग प्रायिकताओं के गुणनफल के बराबर होता है अर्थात्

If two events E_1 and E_2 are independent, then the probability of their occurring together is equal to the product of their individual probability i.e.

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1).P(E_2)$$

Ex. : ताश के 52 सामान्य पत्तों की गड्डी में से 2 पत्ते एक-एक करके निकाले जाते है। प्रायिकता ज्ञात करों जबकि प्रथम पत्ता इक्का तथा दूसरा रंगीन पत्ता (Honour card) हो। दूसरा पत्ता निकलने के पूर्व पहले पत्ते की गड्डी में वापस नहीं रखा जाता है।

From a deck of 52 common cards, 2 cards are taken out one by one. Find the probability when the first card is Ace and the second is Honor card. The first card is not put back into the deck before the second card is drawn.

Sol. : रंगीन पत्ता (Honour card) का तात्पर्य इक्का, बादशाह, बेगम तथा गुलाम से है।

Honour card refers to Ace, King, Queen and Jack.

मान लीजिए कि इक्का निकलने की घटना E_1 तथा Honour card निकलने की घटना E_2 है।

Suppose the event of drawing an ace is E_1 and the event of drawing honour card is E_2.

$$P(E_1) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13} \text{ तथा } P\left(\frac{E_2}{E_1}\right) = \frac{15}{51} = \frac{5}{17}$$

अतः मिश्र प्रायिकता से/Hence, from the mixed probability,

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1)P\left(\frac{E_2}{E_1}\right)$$

$$= \frac{1}{13} \times \frac{5}{17} = \frac{5}{221}$$

Ex. : यदि एक थैले में 3 गेंदे भिन्न-भिन्न रंगों की है। लाल (R), नीली (B), पीली (Y) यदि एक बार में दो गेंदें निकाली जाती हों, तो इसका प्रतिदर्श क्या होगा?

If there are 3 balls of different colour in a bag. Red (R), Blue (B) and Yellow (Y), if two balls are drawn at a time, what will be its pattern.

Sol. : थैले में 3 गेंदें भिन्न-भिन्न रंगों की हैं। यदि लाल को R से, नीली को B से तथा पीली को Y से निरुपित किया जाए, तो इस परीक्षण का प्रतिदर्श समष्टि

There are 3 balls of different colour in the bag. If red is denoted by R, blue by B and yellow by Y, then the sample space of this test is :

S = {RB, BY, YR, BR, YB, RY}

प्रतिदर्श समष्टि ज्ञात करना
(Find the sample space)

Ex. : एक सिक्के को प्रक्षिप्त करने पर प्रतिदर्श समष्टि लिखिए।

Write the sample space for throwing a coin.

Sol. : एक सिक्के को प्रक्षिप्त करने पर प्रतिदर्श समष्टि,

On throwing a coin, the sample space,

S = {H, T}.

Ex. : एक पासे को प्रक्षिप्त करने पर प्रतिदर्श समष्टि लिखिए।

Write the sample space for throwing a dice.

Sol. : एक पासे को प्रक्षिप्त करने पर प्रतिदर्श समष्टि,

On throwing a dice, the sample space,

S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}.

Ex. : एक सिक्कें को चार बार उछाला गया हैं।

If a coin has been tossed four times :

Sol. : ∵ हम जानते हैं कि सिक्के को जब हम उछालते हैं तो सम्भवतः चित्त (H) या पट् (T) आ सकता है। अतः सिक्के को 4 बार उछालने से प्रतिदर्श समष्टि,

If a coin is tossed four time then the number of sample space will be = $2^4 = 16$

S = {HHHH, HHHT, HHTH, HTHH, THHH, HHTT, HTHT, HTTH, THHT, THTH, TTHH, HTTT, THTT, TTHT, TTTH, TTTT}

Ex. : एक पाँसा दो बार प्रक्षिप्त किया गया है।

A dice is thrown twice :

Sol. : व्यापक रूप से प्रत्येक परिणाम को क्रमित युग्म (x, y) द्वारा निरुपित किया जा सकता है जहाँ x पहले पाँसे पर और y दूसरे पासे पर प्रकट होने वाली संख्याएँ हैं। अतः प्रतिदर्श समष्टि निम्नलिखित है :

In general terms each outcome can be represented by an ordered pair (x, y) where x are the numbers appearing one the first die and the numbers appearing on the first dice and y are the numbers appearing on the second dice. Hence the sample space is as follows :

S = {(x, y) : x पहले पासे पर प्रकट संख्या और y दूसरे पासे पर प्रकट संख्या है।

S = {(x, y) : x} : x is the number appearing on the first dice and y is the number appearing on the second dice.

TEAM SPW

अर्थात/Hence,

= {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)}.

Ex. : एक सिक्का उछाला जाता है और सिक्के पर पट् प्रकट होता है तब एक पासा फेंका जाता है।

A coin is tossed and a tail appears on the coin, then a dice is thrown

Sol. : हम जानते हैं कि सिक्के पर पट् (T) प्राप्त होता है और पासे पर क्रमशः 1, 2, 3, 4, 5 या 6 संख्या प्रकट होती है। अतः सिक्के पर पट् आने से एक पासा फेंका जाता है अन्यथा नहीं की प्रतिदर्श समष्टि,

We know that tail is obtained on the coin and the numbers 1, 2, 3, 4, 5 or 6 appear on the dice respectively. Hence, if a coin come up tail then a dice is thrown, otherwise the sample space.

S = {T1, T2, T3, T4, T5, T6}

Ex. : एक पाँसा तथा एक सिक्का उछाला जाता है।

When a dice and a coin is tossed :

Sol. : एक पाँसा तथा एक सिक्का उछालने पर प्रतिदर्श समष्टि,

When a dice and a coin is tossed then sample space will be :

S = {1H, 2H, 3H, 4H, 6H, 1T, 2T, 3T, 4T, 5T, 6T}

Ex. : माना कि संतरों की एक पेटी में से 3 संतरे यादृच्छया निकाले जाते हैं। प्रत्येक संतरे की जाँच करने पर हम खराब को D तथा सही को N से प्रदर्शित करते हैं। इस परीक्षण का प्रतिदर्श समष्टि ज्ञात कीजिए।

Suppose 3 oranges are taken out at random from a box of oranges. After examining each orange, we mark the bad one with D and the good one with N. Find the sample space of this test :

Sol. : ∵ हमें ज्ञात है कि खराब संतरे को D से तथा सही संतरे को N से प्रदर्शित करते हैं।

We know that bad orange is represented by D and good orange is represented by N.

∵ पेटी में से 3 संतरे यादृच्छया निकाले जाते हैं। अतः परीक्षण का प्रतिदर्श समष्टि,

3 oranges are drawn at random from the box. Therefore, the sample space of the test,

S = {DDD, DDN, DND, NDD, NND, NDN, DNN, NNN}

Ex. : चार सिक्के प्रक्षिप्त किये जाते हैं। इस घटना से सम्बन्धित प्रतिदर्श समष्टि अंकित कीजिए।

Four coins are thrown. The sample space related to this event will be :

Sol. : ∵ चार सिक्के प्रक्षिप्त किए जाएँ या सिक्का चार बार प्रक्षिप्त किया जाए परिणाम समान है।

The result is the same whether four coins are tossed or the coin is tossed four times.

अतः S = {HHHH, HHHT, HHTH, HTHH, THHH, HHTT, HTHT, HTTH, THHT, THTH, TTHH, HTTT, THTT, TTHT, TTTH, TTTT}

Ex. : एक थैले में 4 पीले तथा 3 नीले कंचे हैं। यदि यादृच्छया 1 कंचा निकाला जाए, तो इस परीक्षण का प्रतिदर्श समष्टि लिखिए तथा निकाला गया कंचा नीले रंग का है।

There are 4 yellow and 3 blue marbles in a bag. If 1 marble is drawn at random, then write the sample space of this test and the marble drawn is blue in colour :

Sol. : ∵ थैले में 4 पीले तथा 3 नीले कंचे हैं।

4 पीले कंचों को माना Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 से तथा 3 नीले कंचों को B_1, B_2, B_3 से निरूपित करते है।

There are 4 yellow and 3 blue marbles is the bag. 4 yellow marbles are denoted as Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 and 3 blue marbles are denoted as B_1, B_2, B_3.

माना थैले में रखे 7 कंचों में से 1 कंचा निकालने की घटना का प्रतिदर्श समष्टि

Let the sample space of events of taking out 1 marble out of 7 marbles kept in the bag be

S = {Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, B_1, B_2, B_3} तथा B = {B_1, B_2, B_3}

Ex. :

(A) किसी घटना के घटित होने की प्रायिकता $\frac{1}{2}$ हो, तो उसके घटित न होने की प्रायिकता बताइए।

The probability of occurrence of an event is $\frac{1}{2}$ then tell the probability of not occurring of the event.

(B) किसी घटना के घटित न होने की प्रायिकता $\frac{1}{3}$ हो, तो उसके घटित होने की प्रायिकता बताइए।

If the probability of not occurrence of an event is $\frac{1}{3}$ then tell the probability of occurring of the event.

Sol. : (A) ∵ $P(E)+P(\bar{E})=1$

∴ घटित न होने की प्रायिकता/ Probability of occurrence–

$$P(\bar{E})=1-P(E)$$

$$=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

(B) ∵ $P(E)+P(\bar{E})=1$

घटित न होने की प्रायिकता/ Probability of not occurrence–

$$P(E)=1-P(\bar{E})$$

$$=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

Ex. : तीन व्यक्तियों द्वारा किसी लक्ष्य भेद की प्रायिकताएँ क्रमशः $\frac{4}{5},\frac{3}{4},\frac{2}{3}$ है। यदि तीनों निशाना लगाते हैं, तो

The probability of hitting the target of three persons is $\frac{4}{5},\frac{3}{4},\frac{2}{3}$ respectively, then–

(a) लक्ष्य भेद की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।/ Find the probability of hitting the target

(b) कम-से-कम दो के द्वारा लक्ष्य भेदने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।/ Find the probability of hitting the target by at least two persons.

Sol. : माना तीन व्यक्ति क्रमशः A, B और C हैं तब/ Let three persons are A, B and C respectively then,

A द्वारा निशाना लगाये जाने की प्रायिकता/ Probability of hitting target by A $=\frac{4}{5}$

B द्वारा निशाना लगाये जाने की प्रायिकता/ Probability of hitting target by B $=\frac{3}{4}$

C द्वारा निशाना लगाये जाने की प्रायिकता/ Probability of hitting target by C $=\frac{2}{3}$

(a) A का निशाना न लगने की प्रायिकता/ Probability of not hitting target by A $=1-\frac{4}{5}=\frac{1}{5}$

B का निशाना न लगने की प्रायिकता/ Probability of not hitting target by B $=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$

C का निशाना न लगने की प्रायिकता/ Probability of not hitting target by $=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$

किसी का भी निशाना न लगने की प्रायिकता/ Probability of not hitting target by any one $=\frac{1}{5}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{60}$

अतः लक्ष्य भेद की प्रायिकता Hence, probability of hitting the target $=1-\frac{1}{60}=\frac{59}{60}$

(b) कम-से-कम दो निशाने निम्न प्रकार से लगाये जा सकते है/ At least two targets can be hitting following ways :–

(i) A, B, C सभी का निशाना लग जाये, जिसकी प्रायिकता/ A, B, C all of three hit the target then probability $=\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{5}$

(ii) B, C के निशाने लग जायें किन्तु A का नहीं, जिसकी प्रायिकता/ Probability of hitting the target by B and C but not by A $=\frac{1}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{10}$

(iii) C, A के निशाने लग लायें किन्तु B का नहीं, जिसकी प्रायिकता/ Probability of hitting the target by A and C but not by B $=\frac{4}{5}\times\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{15}$

(iv) A, B के निशाने लग जायें किन्तु C का नहीं, जिसकी प्रायिकता/Probability of hitting the target by A and B but not by C $=\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{5}$

चूँकि ये सभी परस्पर अपवर्जी घटनाएँ हैं,

∵ All these are mutually exclusive event,

अतः/hence, अभीष्ट प्रायिकता/required probability

$$=\frac{2}{5}+\frac{1}{10}+\frac{2}{15}+\frac{1}{5}$$

$$=\frac{12+3+4+6}{30}$$

$$=\frac{25}{30}$$

$$=\frac{5}{6}$$

Ex. : ताश के 52 पत्तों की एक भली-भाँति फेंटी गई गड्डी में से एक पत्ता निकाला गया है। निकाले गए पत्ते की प्रायिकता ज्ञात कीजिए–

A card has been drawn from a well shuffled deck of 52 cards. Find the probability of the card drawn

(i)पत्ता ईंट का है/ The card is of diamond

(ii)पत्ता ईंट का नही है/ The card is not of diamond

(iii)पत्ता काले रंग का है (अर्थात् चिड़ी या हुकुम का)/ The card is black in colour (i.e. club and spade)

(iv)पत्ता काले रंग का नहीं है/ The card is not black in colour

Sol. : ताश के कुल पत्तों की संख्या/Total number of cards = 52

(i) गड्डी में कुल ईंटों के पत्तों की संख्या/ Total number of diamond cards in deck = 13

अतः निकाले गए पत्ते की प्रायिकता जो ईंट का है/ the probability of card being a diamond $=\frac{13}{52}=\frac{1}{4}$

(ii) कुल पत्तों की संख्या जो ईंट के नहीं हैं/ Total number of cards drawn which are not diamond = 52 – 13 = 39

निकाले गए पत्ते जो ईंट का नहीं है, की प्रायिकता/ probability of the card drawn which is not diamond $=\frac{39}{52}=\frac{3}{4}$

(iii) काले रंग के पत्तों की संख्या/ Number of black cards = 13 + 13 = 26

अतः काले रंग के पत्तों को निकालने की प्रायिकता/ probability of black card $=\frac{26}{52}=\frac{1}{2}$

(iv) जो पत्ता काले रंग का नहीं है, उसको निकालने की प्रायिकता/ Probability of the card which is not black $=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

TEAM SPY